Interacciones. Matemáticas

2

SEGUNDO GRADO

Datos de catalogación

Autores: Mancera Martínez, Eduardo y Basurto Hidalgo, Eduardo
Interacciones. Matemáticas 2
Primera edición
Segundo grado, educación secundaria
Pearson Educación de México, S.A. de C.V., 2019
ISBN SEP: 978-607-32-4827-3
ISBN: 978-607-32-4791-7
Área: Secundaria
Formato: 20.5 x 27 cm Páginas: 256

Interacciones. Matemáticas 2

El proyecto educativo *Interacciones. Matemáticas 2* es una obra colectiva creada por un equipo de profesionales, quienes cuidaron el nivel y pertinencia de los contenidos, lineamientos y estructuras establecidos por Pearson Educación.

Dirección general: Sergio Fonseca ■ **Dirección de innovación y servicios educativos:** Alan David Palau ■ **Gerencia de contenidos y servicios editoriales:** Jorge Luis Íñiguez ■ **Coordinación de contenidos MePro Business:** Teresa Islas Paredes ■ **Coordinación de arte y diseño:** Mónica Galván Álvarez ■ **Especialista en contenidos de aprendizaje:** Yoselín Flores Zenteno ■ **Cuidado de la edición y Revisión técnica y didáctica:** Rubén García Madero ■ **Corrección de estilo:** Julieta Romero Miguélez ■ **Lectura de pruebas: Nayeli Camacho Olvera y Ollintzin Queiros Romero** ■ **Diseño de interiores y Portada:** Panda Rojo ■ **Composición y diagramación:** RAYO Estudio ■ **Ilustración:** Gerardo Sánchez Cortes.

Contacto: soporte@pearson.com

Primera edición, 2019

ISBN LIBRO IMPRESO: 978-607-32-4791-7
ISBN E-BOOK: 978-607-32-4792-4
ISBN SEP: 978-607-32-4827-3

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031

www.pearsonenespañol.com

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 22 21 20 19

Pearson

Pearson Hispanoamérica
Argentina ■ Belice ■ Bolivia ■ Chile ■ Colombia ■ Costa Rica ■ Cuba ■ República Dominicana ■ Ecuador ■ El Salvador ■ Guatemala ■ Honduras ■ México ■ Nicaragua ■ Panamá ■ Paraguay ■ Perú ■ Uruguay ■ Venezuela

Introducción

Cuando se piensa en la enseñanza de las matemáticas, generalmente, asociamos ideas sobre el empleo de algoritmos o procedimientos rutinarios o símbolos sujetos al uso de determinadas reglas. Esta imagen de las matemáticas provoca que se piense que lo importante es saber cómo se hace y, después, repetirlo muchas veces. Sin embargo, las matemáticas surgieron de un cúmulo de esfuerzos por entender la naturaleza y la sociedad. El conocimiento derivado de este esfuerzo se ha ido conformando a partir de muchos tropiezos y múltiples errores o desaciertos de personajes muy importantes en diferentes momentos históricos y que hoy se consideran como las mentes más brillantes de su época.

Las matemáticas nacieron sin reglas, sin procesos rutinarios; se hicieron pruebas, experimentos, análisis y relaciones, y poco a poco se fueron perfilando los conceptos y procedimientos que ahora conocemos. Fueron largos periodos de tiempo de reflexión y discusión lo que condujo a las matemáticas actuales.

Hoy en día, existe una tendencia notable en la enseñanza de las matemáticas que retoma la historia de la generación del pensamiento matemático al recurrir a situaciones problemáticas, antes de usar símbolos o procedimientos rutinarios en abstracto que generen la reflexión, para que paulatinamente los alumnos vayan conformando sus propios significados y simbolizaciones, como medio de preparación para arribar al conocimiento abstracto que ahora conocemos.

La resolución de problemas –el corazón de las matemáticas– es el objetivo y la herramienta didáctica de este libro, pues tenemos el propósito de dejar de privilegiar los estereotipos, ya que lo relevante del pensamiento matemático no es la acumulación de datos en la memoria de los estudiantes, sino que se use el poder constructivo del conocimiento y que haya un convencimiento de los procesos antes de simbolizar o establecer reglas.

El presente libro tiene como eje analizar, reflexionar, discutir y crear códigos propios de comunicación para llegar al conocimiento compartido y reconocido por todos. No basta hacer ensayos ni intentos para resolver problemas, hay que llegar al punto que permita organizar el conocimiento.

Al respecto, conviene tener presente lo que Einstein expresó en alguna ocasión: "Las proposiciones matemáticas, en cuanto tienen que ver con la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no tienen nada que ver con la realidad".

Mosaico del palacio de La Alhambra en Granada, España

Presentación

Estimado alumno

Si alguna vez te has preguntado por qué necesitas estudiar matemáticas, la respuesta es sencilla: muchas situaciones de tu vida diaria pueden ser comprendidas con su uso, como contar, medir, localizar, diseñar, entre otras.

Las matemáticas no sólo son un conjunto de fórmulas o procedimientos que debes aprender de memoria, como lo pudiste comprobar a lo largo del curso de matemáticas de primero de secundaria; sino que aprender matemáticas también implica la expresión del razonamiento y la argumentación, la elaboración de códigos de comunicación de ideas, de discusiones e intentos por converger; es decir, son parte de lo que requerimos hacer día a día.

Por ello, este libro, nuevamente, te permitirá explorar situaciones que te conducirán, de manera natural y gradual, al desarrollo y progresión del pensamiento matemático, con el que podrás seguir construyendo una perspectiva crítica del mundo que te rodea a partir del uso de relaciones numéricas, gráficas, esquemas o expresiones simbólicas.

Con ayuda de tu profesor, realizarás actividades a través del planteamiento de situaciones problemáticas y prácticas, que te invitarán a interpretar y reflexionar, a buscar de manera individual soluciones, a trabajar en equipo y a comunicarte con tus compañeros. Todos aspectos relevantes en la adquisición de competencias de este grado.

Para facilitar el entendimiento de los temas expuestos, encontrarás, entre otros recursos, imágenes, esquemas, propuestas para el uso de software, acertijos, sugerencias de consulta de otros materiales y un glosario en el que se definen los términos y conceptos de difícil compresión. Asimismo, se te proporciona una guía para que conozcas el libro y obtengas el mayor provecho posible.

Con el apoyo de este libro, tendrás la oportunidad de consolidar una perspectiva de las matemáticas con la que comprenderás mejor tu mundo y continuarás preparándote para enfrentar los retos de tu vida cotidiana.

Índice

Conoce tu libro

Entradas de Periodo

- Identificarás los aprendizajes esperados del periodo.
- Descubrirás algunas aportaciones sorprendentes de las matemáticas en cada uno de los tres ejes temáticos: número, álgebra y variación; forma espacio y medida; y análisis de datos. Y cómo cada uno de ellos te permitirá analizar varios aspectos cotidianos.

Estructura

El eje, el tema y el aprendizaje esperado dan inicio a cada secuencia de aprendizaje de tu libro, el cual está organizado en lecciones. Cada lección tiene tres etapas de desarrollo: **Reflexiona y discute, Aprende y aplica y Crea y evalúate**. Estas secciones te llevarán a lograr de manera progresiva el aprendizaje esperado de cada lección.

Las lecciones fueron numeradas de manera consecutiva y tienen un título que hace alusión al aprendizaje que trabajarás en cada una para que te resulte más fácil identificarlas.

Eje, tema y aprendizajes esperados

Número y nombre de la lección

Nombre de la sección

Instrucciones generales

Secciones fijas

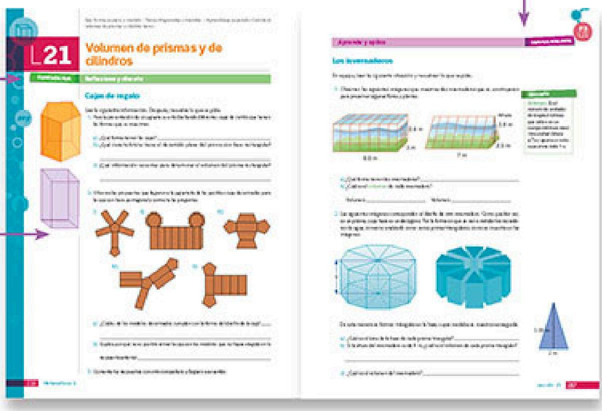
Sigamos adelante. *Aprende y aplica*

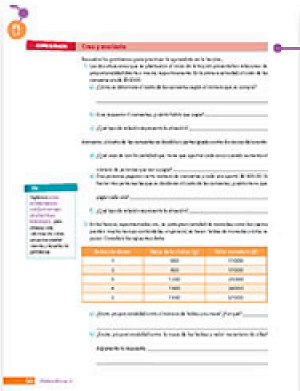
En esta sección se introduce un nuevo contenido. Aquí realizarás actividades que te permitirán reflexionar, identificar patrones, regularidades y analogías. Para asegurar tu comprensión y la construcción del conocimiento, encontrarás información conceptual que te permitirá validar o corregir tus conjeturas.

Comenzamos. *Reflexiona y discute*

Inicia con una situación problemática o detonadora para que, de manera individual o colectiva, explores y pongas en práctica tus conocimientos previos, fundamentales para la construcción de aprendizajes nuevos.

Planteamiento detonador





Concluimos. *Crea y evalúate*

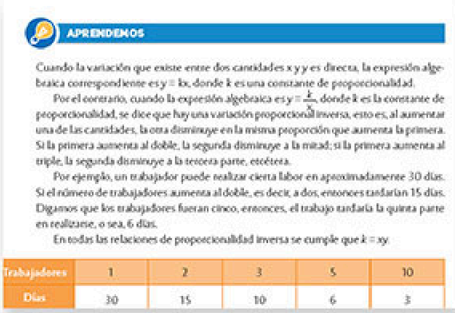
Es el momento de cierre de la lección, en el que aplicarás los nuevos conocimientos y las habilidades adquiridas. Tendrás la oportunidad de resolver problemas con los procedimientos y las estrategias aprendidos, describir procesos a partir de un resultado y plantear problemas a partir de operaciones.

Secciones complementarias

Para fortalecer tu proceso de aprendizaje, existen subsecciones que te ayudarán a comprender mejor el contenido y ponerlo en práctica.

Aprendemos

Es el apartado en el que se introduce el aspecto teórico del contenido, el cual se incluye de manera gradual. Esto te permitirá adueñarte del proceso de aprendizaje y alcanzar los aprendizajes esperados.



APRENDEMOS

Cuando la variación que existe entre dos cantidades x y y es directa, la expresión algebraica correspondiente es $y = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad.

Por el contrario, cuando la expresión algebraica es $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad, se dice que hay una variación proporcional inversa, esto es, al aumentar una de las cantidades, la otra disminuye en la misma proporción que aumenta la primera. Si la primera aumenta al doble, la segunda disminuye a la mitad; si la primera aumenta al triple, la segunda disminuye a la tercera parte, etcétera.

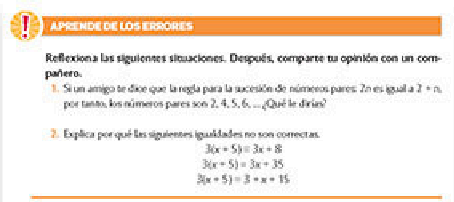
Por ejemplo, un trabajador puede realizar cierta labor en aproximadamente 30 días. Si el número de trabajadores aumenta al doble, es decir, a dos, entonces tardarían 15 días. Digamos que los trabajadores fueran cinco, entonces, el trabajo tardaría la quinta parte en realizarse, o sea, 6 días.

En todas las relaciones de proporcionalidad inversa se cumple que $k = xy$.

Trabajadores	1	2	3	5	10
Días	30	15	10	6	3

Aprende de los errores

Se plantean errores comunes en algunos temas con el fin de que analices y determines la correcta aplicación o los límites de ciertos procedimientos.



APRENDE DE LOS ERRORES

Reflexiona las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

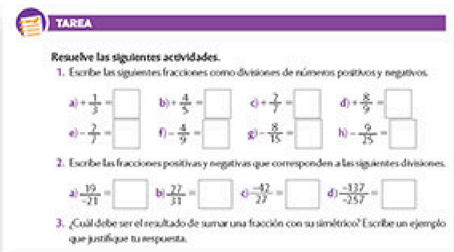
1. Si un amigo te dice que la regla para la sucesión de números pares: $2n$ es igual a $2 + n$, por tanto, los números pares son 2, 4, 5, 6, ... ¿Qué le dirías?

2. Explica por qué las siguientes igualdades no son correctas.

$$3(x + 5) = 3x + 8$$
$$3(x + 5) = 3x + 35$$
$$3(x + 5) = 3 + x + 15$$

Tarea

Esta sección la trabajarás en casa. Aquí practicarás las operaciones o los procedimientos necesarios para el avance de la lección.



TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Escribe las siguientes fracciones como divisiones de números positivos y negativos.

a) $+\frac{1}{3} = \square$ b) $+\frac{4}{5} = \square$ c) $+\frac{2}{7} = \square$ d) $+\frac{8}{9} = \square$

e) $-\frac{2}{7} = \square$ f) $-\frac{4}{9} = \square$ g) $-\frac{8}{15} = \square$ h) $-\frac{9}{25} = \square$

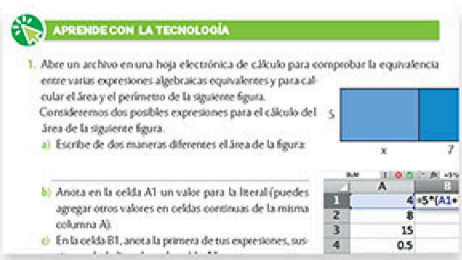
2. Escribe las fracciones positivas y negativas que corresponden a las siguientes divisiones.

a) $\frac{19}{-21} = \square$ b) $\frac{22}{31} = \square$ c) $\frac{-42}{27} = \square$ d) $\frac{-137}{-257} = \square$

3. ¿Cuál debe ser el resultado de sumar una fracción con su simétrico? Escribe un ejemplo que justifique tu respuesta.

Aprende con la tecnología

Te proponemos usar la tecnología para reforzar, validar o comprobar los conocimientos adquiridos.



APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Abre un archivo en una hoja electrónica de cálculo para comprobar la equivalencia entre varias expresiones algebraicas equivalentes y para calcular el área y el perímetro de la siguiente figura. Consideremos dos posibles expresiones para el cálculo del área de la siguiente figura.

5

x 7

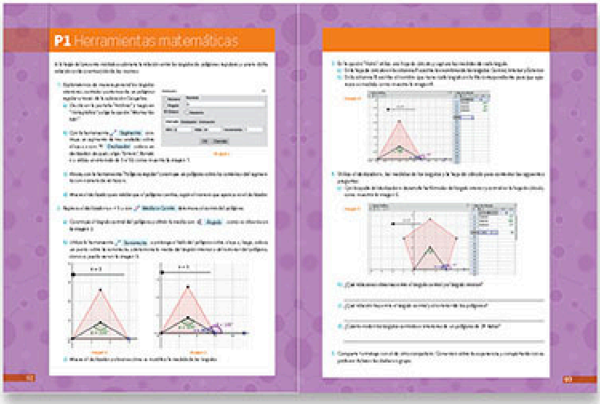
a) Escribe de dos maneras diferentes el área de la figura:

b) Anota en la celda A1 un valor para la literal (puedes agregar otros valores en celdas continuas de la misma columna A).

c) En la celda B1, anota la primera de tus expresiones, sus-

	A	B
1	4	=5*(A1+
2	8	
3	15	
4	0.5	

Secciones complementarias



Herramientas matemáticas

En esta sección, tendrás la oportunidad de poner en practica algunos temas vistos, validar conjeturas y argumentar relaciones o procedimientos a partir de una aplicación en una computadora.

Glosario

Al final del libro encontrarás definiciones de términos y conceptos matemáticos que te permitirán entender de mejor manera los contenidos.

Bibliografía

Al final del libro te sugerimos algunos títulos que pueden resultar de tu interés para ampliar tus conocimientos. También se sugieren algunos sitios de internet en los que encontrarás información matemática y ejercicios que te ayudarán a consolidar los conocimientos adquiridos.

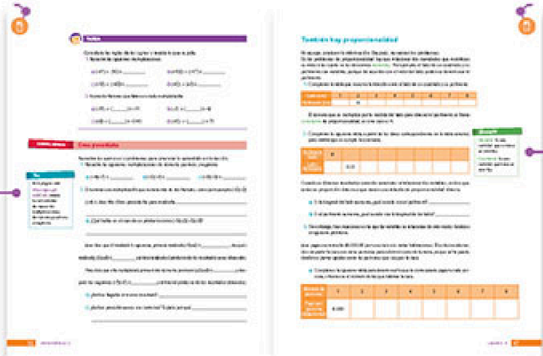
Secciones flotantes

Glosario

Facilita tu comprensión con la definición de términos matemáticos que son recurrentes y fundamentales a lo largo del libro.

Tic

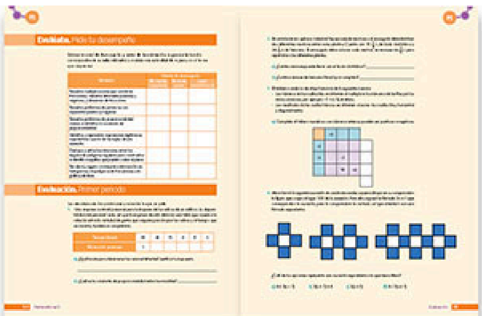
Refuerza un tema de la lección por medio de recursos digitales. En la sección siempre aparece la liga del recurso digital que se propone.

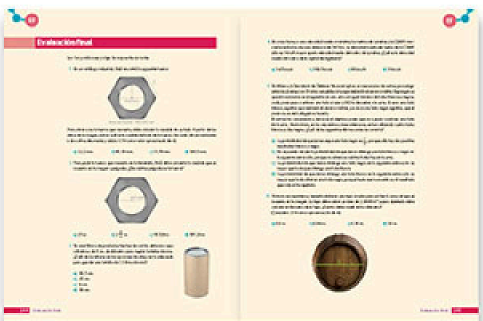


Evaluación

Para concluir cada periodo, te ofrecemos dos tipos de evaluación.

- Indicadores de desempeño (autoevaluación).
- Evaluaciones formativas de cierre de periodo.
- Sección "Mide tu avance", en la que podrás identificar los temas que debes repasar cuando no hayas acertado correctamente un reactivo.





Evaluación final

Y para cerrar con broche de oro, la evaluación final, en la que podrás identificar tu desempeño de fin de curso. Te sorprenderás de todo lo que has aprendido, de los procedimientos que dominas o que estás en vía de dominar.

Periodo 1

En este periodo abordarás los siguientes aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.
- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.
- Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

En este primer bloque abordarás diversos temas que fueron investigados por diferentes civilizaciones antiguas y cuyo desarrollo llevó varios siglos.

Aprenderás:

- diferentes estrategias para resolver multiplicaciones que combinan fracciones y números decimales. También aprenderás a resolver divisiones de fracciones;
- el significado de expresar números como potencias positivas y negativas; aprenderás a operar con ellos y a representar de manera simplificada cantidades muy grandes y cantidades muy pequeñas;
- qué sucede con dos magnitudes que se relacionan proporcionalmente de manera inversa, es decir, qué sucede con una de ellas cuando la otra disminuye o aumenta;
- a representar de distintas formas las reglas de sucesiones artiméticas y expresiones algebraicas a partir de modelos geométricos;
- las propiedades de los polígonos regulares, las cuales te ayudarán a trazarlos correctamente y a identificar aquellos que permiten cubrir el plano;
- a analizar e intepretar diferentes formas de recolección y representación de datos en distintos tipos de gráficas.

Todo lo anterior te permitirá analizar varios aspectos de distintos temas que te ayudarán a desarrollar tu habilidad para resolver problemas y tomar buenas decisiones al enfrentarte a diferentes situaciones de tu vida diaria.

El palacio de **La Alhambra**, situado en Granada, España, etimológicamente significa "la roja", debido al color rojizo de sus muros y paredes. Uno de los grandes atractivos de este palacio son los teselados que cubren sus pisos y paredes, como se aprecia en la fotografía, y que han servido de inspiración a muchos artistas, como Escher. Cinco de las teselas más famosas de La Alhambra se llaman: "el hueso", "el pez volador", "el avión" , "la pajarita" y "el pétalo".

L1 Hacia la división de fracciones

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Situaciones para dividir fracciones

Lee la siguiente situación. Después, resuelve lo que se pide.

1. Durante una fiesta se prepararon jarras de agua con capacidad de $2\frac{1}{2}$ L para colocarlas en diferentes mesas.
   a) ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{4}$ de litro pueden llenarse con cada jarra? ____________
   b) Describe una forma de resolverlo.
   ____
   c) ¿Es posible usar restas o diferencias de fracciones para resolverlo? Argumenta.
   ____
   d) ¿El problema podría resolverse por medio de una multiplicación? Explica tu respuesta.
   ____
   e) ¿Puede utilizarse la división? ____________
   f) ¿Cómo resolverías un problema similar de forma más rápida?
   ____
2. Se están llenando bolsas de cacahuates para repartir en una reunión. Los cacahuates están en costales que pesan $8\frac{1}{4}$ kg, cada bolsa se llenará con $\frac{1}{3}$ de kg.
   a) ¿Podrías realizar el reparto por medio de una multiplicación? Explica cómo. ____________
   b) ¿Cuántas bolsas de cacahuates se obtendrán de cada costal? ____________
   c) ¿Sobrará algo del costal de cacahuates? Si es así, ¿cuántos kilogramos? ____________
   d) ¿Qué hiciste para resolverlo? ____________
   ____

Generalmente, al resolver un problema, estamos comparándolo con una infinidad de problemas similares que plantean lo mismo, pero utilizamos diferentes situaciones y diferentes datos.

3. Plantea tres problemas diferentes a los dos anteriores, pero que se resuelvan con procedimientos similares, que incluyan la multiplicación de fracciones. Deberán tener otros datos y otro contexto. Escríbelos en tu cuaderno y resuélvelos.

____

Aprende y aplica

Operaciones con fracciones y decimales

Resuelve de manera individual lo siguiente.

En ocasiones las cantidades que se presentan en los comercios son con números decimales, pero en el uso que haremos de los productos están expresados en fracciones.

1. Cuando se compra pintura, por lo general, se venden galones (un galón equivale a 3.7854 L) y se reparten en botes de $\frac{1}{4}$ L o de otra fracción de litro.
   a) Si compras dos galones y debes repartirlos en botes de $\frac{1}{4}$ L, ¿cómo sabes cuántos botes se pueden llenar? __________
   b) Describe qué hiciste para resolver el problema. __________
   c) ¿Qué multiplicación de fracciones permite resolver el problema? __________
   d) ¿Sobrará pintura después de llenar los botes de $\frac{1}{4}$ litro?
   ____
   e) Si los datos fueran números enteros, ¿qué operación utilizarías para resolverlo? Explica tu respuesta al grupo.
2. En muchos momentos tendremos que realizar operaciones que impliquen combinar decimales y fracciones. Cuando vas al mercado o a la tienda cada producto tiene un peso y un costo; algunos se piden en fracciones y el costo se expresa en decimales. Observa la lista de precios.

Lista de precios: 1 kg de azúcar: \$24.83 1 L de aceite: \$22.24 1 kg de café: \$152.96

   a) Si compras $\frac{3}{4}$ de 1 kg de azúcar, $2\frac{1}{2}$ L de aceite y $3\frac{1}{4}$ kg de café de grano, ¿cuánto es lo que tienes que pagar? __________
   b) Si otra persona pide $\frac{1}{4}$ de kg de azúcar, 1 L de aceite y $1\frac{1}{2}$ kg de café de grano, ¿cuánto pagará? __________
   c) ¿Qué procedimiento seguiste para responder? __________
   d) ¿Podrías resolver el problema multiplicando fracciones? Explica cómo procederías.
   ____
3. Resuelve las siguientes operaciones. Simplifica cuando sea necesario.

$\frac{2}{3} \times 3.25 = \boxed{}$ $\frac{3}{5} \times 2.6 = \boxed{}$ $\frac{2}{5} \times 7.347 = \boxed{}$

$\frac{3}{5} \times 12.76 = \boxed{}$ $13.16 \times \frac{2}{8} = \boxed{}$ $\frac{7}{9} \times 2.37 = \boxed{}$

4. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Comenten los casos en los que es mejor realizar las operaciones con fracciones y los casos en los que es mejor utilizar números decimales. Escriban en su cuaderno los acuerdos a los que llegaron.

Áreas y división de fracciones

En pareja, lean la siguiente información. Después, resuelvan lo que se pide.

Anteriormente trabajaron o resolvieron multiplicaciones de fracciones, ahora resolverás problemas de división de fracciones. Con los métodos que utilizaste anteriormente puedes estimar o sacar conjeturas sobre el resultado de una operación de división de fracciones.

1. Estima el resultado de las siguientes divisiones.

$2 \div \frac{1}{3} = \square$ $\frac{2}{3} \div 5 = \square$ $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4} = \square$ $\frac{2}{5} \div \frac{6}{7} = \square$

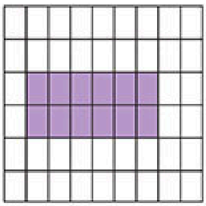
Sin embargo, los procedimientos que elegiste o encontraste pueden ser largos y, tal vez, complicados, por esta razón en matemáticas se busca encontrar aquellos procedimientos que reduzcan las dificultades y simplifiquen los problemas.

2. El diseño para una cubierta de mesa cuadrada requiere que se tracen 35 partes rectangulares con cinco franjas horizontales, como muestra la imagen de la izquierda.

   a) Encuentren el número de franjas que se tienen que trazar de manera vertical. _____

   b) ¿Qué fracción representa cada parte rectangular en que quedó dividido el cuadrado? _____

   c) Si se quiere considerar solamente una parte rectangular de la cubierta de $\frac{12}{35}$, ¿cuántos rectángulos del diseño deberían considerar? _____



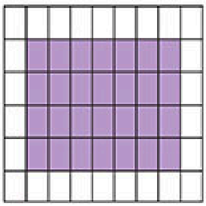
3. Consideren el siguiente cuadrado dividido en rectángulos de iguales dimensiones.

   a) ¿Qué fracciones representan los lados del rectángulo o de color morado? _____

   b) Escriban la operación para calcular el área de color: _____

   c) ¿Qué división permite conocer el lado vertical si conocemos el área y el lado horizontal? Escriban el resultado. _____

   d) Escriban la operación que permite conocer el lado horizontal, a partir del área y del lado vertical: _____



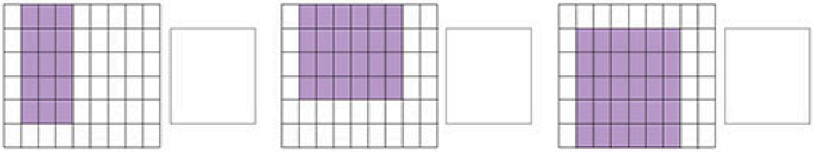
4. Ahora, consideren el área de color en la siguiente figura.

   a) ¿Qué representa el resultado de la multiplicación $\frac{4}{6} \times \frac{7}{9}$? _____

   b) El resultado de la división $\frac{28}{54} \div \frac{4}{6}$, ¿qué representa en el rectángulo de color? _____

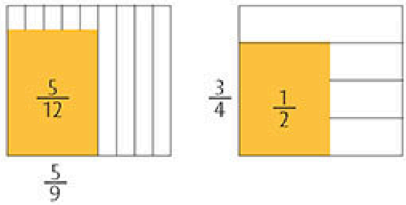
   c) ¿Y el resultado de la división: $\frac{28}{54} \div \frac{7}{9}$? _____

5. Expresen el área de los rectángulos de color como multiplicación y la medida de los lados con una división de fracciones.



a) Dados los casos anteriores, escriban cómo realizar divisiones entre fracciones.

6. Observen el área de color amarillo en cada figura, las medidas que se muestran y respondan.



a) Escriban las operaciones a realizar para obtener la medida que falta en cada figura e incluyan el resultado.

b) ¿Qué estrategia siguieron para resolver las operaciones?

Determina el resultado de divisiones de fracciones

En pareja, lean la información. Después, resuelvan lo que se pide.

Un cociente implica la división del dividendo entre el divisor, es decir, cociente = dividendo / divisor, de tal forma que la multiplicación y la división son operaciones inversas, ya que entonces se cumple que: divisor × cociente = dividendo. De ahí que se pueda establecer una forma para determinar el resultado de una división.

1. En la división de fracciones $\frac{8}{6} \div \frac{2}{3} =$, el numerador y denominador del cociente deben cumplir con la propiedad antes señalada: $\frac{2}{3} \times \frac{?}{?} = \frac{8}{6}$.

a) ¿Por qué número multiplican el 2 para obtener 8?

b) ¿Por qué número multiplican 3 para obtener 6?

c) Así, tenemos que $\frac{2}{3} \times \boxed{} = \frac{8}{6}$, por tanto, $\frac{8}{6} \div \frac{2}{3} = \boxed{ = }$.

d) ¿Qué relación hay entre los productos: 8×3 y 6×2 y el resultado de la división $\frac{8}{6} \div \frac{2}{3}$?

No siempre es tan sencillo lograr encontrar el resultado de una división con el procedimiento descrito antes, como podrás ver en los siguientes casos.

Glosario

Cociente. Resultado de una división.

Divisor. Número que divide.

Dividendo. Número que se divide.

2. Consideren la división $\frac{7}{6} \div \frac{2}{3}$ y respondan.

   a) De acuerdo con el procedimiento anterior, ¿qué tendrían que hacer en este caso?

   ____

   b) ¿Qué multiplicación representa la situación? ______________________

   c) ¿Es posible encontrar valores para la fracción del factor faltante?

   ____

En matemáticas es común buscar equivalencias numéricas que nos permitan realizar ciertos cálculos de manera más efectiva y con menos complicaciones operativas.

   d) ¿Qué relación tiene la división $\frac{7}{6} \div \frac{2}{3}$ con la división $\frac{14}{12} \div \frac{2}{3}$? ______________

   e) Resuelvan una multiplicación para encontrar el resultado de la división: ______________

   f) ¿Cuál será el resultado de la división $\frac{7}{6} \div \frac{2}{3}$? ______________________

   g) ¿Qué relación hay entre los productos 7×3 y 2×6 con el resultado de la división $\frac{7}{6} \div \frac{2}{3}$? ______________________________________

   ____

3. Describan una forma de encontrar el resultado de una división de fracciones, a partir de la relación entre las multiplicaciones y el cociente de las divisiones. Validen su procedimiento resolviendo algunas operaciones.

TAREA

Resuelve las actividades.

1. Encuentra el resultado de las siguientes divisiones:

   a) $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} = \boxed{}$ b) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \boxed{}$ c) $\frac{7}{9} \div \frac{4}{5} = \boxed{}$ d) $\frac{5}{8} \div \frac{3}{2} = \boxed{}$

2. En una fábrica se empacan cajas con 12 frascos de mermelada, por ley se debe dar a conocer la cantidad de cada ingrediente en cada frasco. Se sabe que en la elaboración de 12 frascos se utilizan $3\frac{1}{2}$ kg de fruta, $\frac{4}{5}$ de kg de azúcar, $2\frac{1}{4}$ L de agua pura y $\frac{3}{4}$ de kg de conservadores. Anota la cantidad de cada ingrediente en cada frasco.

   a) Fruta = ______ b) Azúcar = ______ c) Agua = ______ d) Conservadores = ______

3. En una fábrica se hacen tiras de tela que miden $\frac{28}{9}$ de metro, las cuales se dividen en tiras de $\frac{3}{4}$ de metro.

   a) ¿Que fracción de metro tiene cada tira cortada? ______________________

   b) ¿Cuántas tiras se cortaron? ______________________________

Recíprocos y división de fracciones

En equipo, resuelvan las siguientes actividades.

1. Resuelvan las siguientes divisiones.

$\frac{3}{3} = \square$ $\frac{7}{7} = \square$ $\frac{15}{15} = \square$ $\frac{73}{73} = \square$ $\frac{123}{123} = \square$

a) ¿Cuál es el resultado de dividir un número entre sí mismo? ______________

2. Completen las siguientes igualdades.

$\frac{3}{3} = \frac{3}{1} \times \frac{1}{3} = 3 \times \frac{1}{3} = \square$ $\frac{15}{15} = \boxed{\quad \times \quad = \quad \times \quad = \quad}$

$\frac{123}{123} = \boxed{\quad \times \quad = \quad \times \quad = \quad}$

APRENDEMOS

Dado un número natural, diferente de cero, se dice que la fracción con numerador 1 y denominador del mismo número es su recíproco. Por ejemplo, el recíproco de 3 es $\frac{1}{3}$, el recíproco de 19 es $\frac{1}{19}$, el recíproco de 269 es $\frac{1}{269}$, etcétera.

En el caso de las fracciones, el recíproco de $\frac{4}{5}$ debe ser: $\frac{1}{\frac{4}{5}}$.

Una propiedad de un número y su recíproco es que al multiplicarse entre ellos el resultado es igual a la unidad. Por ejemplo: $\frac{4}{5} \times \frac{?}{?} = 1$, así sabemos que el recíproco de $\frac{4}{5}$ es $\frac{5}{4}$, porque $\frac{4}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{4 \times 5}{5 \times 4} = \frac{20}{20} = 1$.

Así, la división de un número entre él mismo es igual al producto del número por su recíproco, es decir, $\frac{15}{15}$ es igual a 15 por su recíproco: $15 \times \frac{1}{15} = \frac{15}{1} \times \frac{1}{15} = \frac{15 \times 1}{1 \times 15} = \frac{15}{15} = 1$.

Esto demuestra una forma de encontrar el resultado de una división, utilizando el recíproco:

$$\frac{\textit{fracción dividendo}}{\textit{fracción divisor}} = \textit{fracción dividendo} \times \frac{1}{\textit{fracción divisor}} = \textit{fracción dividendo} \times \textit{recíproco de la fracción divisor} = \textit{resultado}$$

por ejemplo: $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{21}$

3. A partir de la información anterior, encuentren los recíprocos de las siguientes fracciones.

a) $\frac{3}{5}$ $\square$ b) $\frac{2}{7}$ $\square$ c) $\frac{1}{12}$ $\square$ d) $\frac{7}{4}$ $\square$

4. Encuentren el resultado de las divisiones. Utilicen el recíproco del divisor.

a) $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} = \square$ b) $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \square$ c) $\frac{7}{9} \div \frac{4}{5} = \square$ d) $\frac{5}{8} \div \frac{3}{2} = \square$

5. Comparen sus resultados de las actividades anteriores con otros compañeros. Si hay diferencias o alguno de los resultados es incorrecto, expliquen lo que sucedió.

APRENDE DE LOS ERRORES

Reflexiona las siguientes preguntas. Después, comparte tu opinión con la de otro compañero.

1. Si un compañero dice que el resultado de la división $\frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, ¿qué le dirías?
2. Si un compañero dice que la división $\frac{2}{3} \div \frac{1}{4}$ no se puede resolver porque $\frac{1}{4}$ es menor que $\frac{2}{3}$, ¿qué le dirías?
3. Si un compñero dice que $\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$ es igual a 2, porque $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$, ¿qué le dirías?

Proporcionalidad y división de fracciones

En equipo, analicen las siguientes situaciones. Después, resuelvan las actividades.

1. Observen que pueden usar un factor de proporcionalidad para determinar una cantidad mayor a una cantidad dada.
   a) Por ejemplo, si tienen $250.00 y aplican un factor de proporcionalidad 4, ¿qué cantidad se obtiene? ¿Cómo la obtuvieron? __________
   b) ¿Qué operación pueden utilizar para convertir la cantidad anterior a la original, es decir, regresar a $250.00?
   ____
2. En la siguiente tabla, apliquen los factores de proporcionalidad que se piden. Un factor hace que la cantidad crezca y el otro permite regresar a la cantidad original.

Cantidad original ($)	Factor de proporcionalidad	Operación y resultado	Factor de proporcionalidad que regresa a la cantidad original	Operación y resultado
47.00	5			
596.00	9			
1 389.00	12			

Cuando se aplica un factor de proporcionalidad a una cantidad para obtener otra cantidad; y posteriormente se aplica otro factor de proporcionalidad a la cantidad obtenida para tener como resultado la cantidad original, se dice que dichos factores de proporcionalidad son **factores recíprocos**.

a) Si multiplican un factor de proporcionalidad y su recíproco, ¿cuál es el resultado?
____
b) Si a una figura le aplican un factor de proporcionalidad 3, ¿qué división permite regresar a la figura original? __________
c) ¿Qué factor de proporcionalidad tienen que aplicar a la reproducción para obtener la figura original?
____

3. Completen la siguiente tabla. Después, respondan lo que se pide.

Cantidad original	Factor de proporcionalidad	Operación y resultado	Factor de proporcionalidad que regresa a la cantidad original	Operación y resultado
15	5			
389	7			
25	$\frac{2}{5}$			
86	$\frac{3}{7}$			
128	$\frac{7}{8}$			

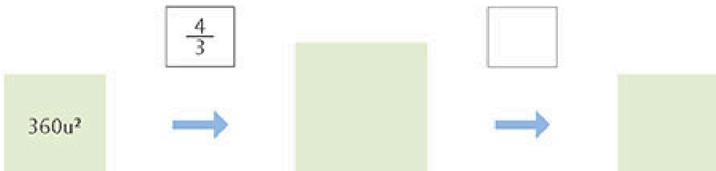
a) Si tienen \$320.00, ¿qué cantidad obtendrían si la triplican? ______

b) Si el resultado que obtuvieron se reduce a la cuarta parte, calculen la cantidad que se obtendría. ______

c) ¿Con qué fracción se puede calcular directamente la cantidad anterior? ______

d) Dado el resultado anterior, apliquen su recíproco, multiplíquenlo por el resultado del inciso b. ¿Qué resultado obtuvieron? ______

4. A la medida del área del cuadrado se le aplicó el factor de proporcionalidad que se muestra. Determinen la medida del área de la reproducción; después, determinen el factor recíproco que permite volver a la misma área del cuadrado original.



a) Al aplicar un factor de proporcionalidad (incremento o reducción) a un número, ¿qué sucede al aplicar al número resultante el recíproco del factor de proporcionalidad?

______

b) Si al número 246 se le aplica el factor de proporcionalidad $\frac{2}{3}$, ¿qué factor de proporcionalidad revierte el efecto del primer factor? ______

5. En grupo, revisen sus respuestas. Comenten sobre la aplicación del recíproco a un factor de proporcionalidad fraccionario y su relación con la división de fracciones.

APRENDEMOS

Es importante que al realizar las operaciones no te aprendas de memoria los procedimientos, sino que razones y entiendas por qué se realizan de cierta manera. En esta lección has utilizado diferentes procedimientos para resolver una división de fracciones y las has relacionado con la multiplicación y con la proporcionalidad.

Si la división se escribe de forma horizontal: $\frac{3}{7} \div \frac{5}{8}$, se multiplica el numerador del dividendo por el denominador del divisor y el producto es el numerador del resultado. Luego, se multiplica el denominador del dividendo por el numerador del divisor y el producto es el denominador del resultado: $\frac{3}{7} \div \frac{5}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$.

Lo anterior es igual a usar recíprocos de los divisores, porque la división de fracciones se transforma en una multiplicación: $\frac{3}{7} \div \frac{5}{8} = \frac{3}{7} \times \frac{8}{5} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$.

Una división de fracciones, por ejemplo, $\frac{3}{7} \div \frac{5}{8}$, puede escribirse verticalmente de la siguiente forma: $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}}$. para resolver la división mediante esta forma, se multiplican los números de los extremos y el producto se coloca en el numerador del resultado. Después, se multiplican los números del centro y se coloca el producto en el denominador del resultado. A este procedimiento se le conoce, informalmente, como **ley sándwich**: primero las tapas y después lo del centro.

$$\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{8}} = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{24}{35}$$

TAREA

Resuelve los siguientes problemas.

1. Cinco personas compraron un lote de $4\frac{2}{3}$ toneladas de fruta. Cuatro de ellos compraron la misma cantidad; el otro compró una cuarta parte de lo que compró el resto. ¿Cuánto compró cada uno?

2. Un corredor de autos recorre en $10\frac{1}{2}$ minutos cierta distancia en un vehículo de prueba. Si se mantiene a la misma velocidad durante $3\frac{1}{4}$ de horas, ¿cuántas veces habrá recorrido la misma distancia?

3. Un terreno se usa para cultivar dos tipos de productos. Se usaron $\frac{2}{7}$ para un cultivo y $\frac{3}{5}$ para el otro. Si el terreno es de $5\frac{3}{4}$ hectáreas, ¿qué parte del terreno se utilizó para los cultivos? ¿Cuánto terreno queda sin cultivar?

Resolución de problemas

En parejas, lean los siguientes problemas. Después, resuelvan lo que se pide.

1. En un *call center* se realizan llamadas de promoción de un producto. Durante $6\frac{1}{2}$ minutos se realizan 91 llamadas.
   a) ¿Cuántos minutos se requieren para realizar 455 llamadas?

   ____

   b) ¿Cuántas llamadas se realizan durante 90 minutos? ______________
2. En un laboratorio de medicamentos, en tres semanas se produce 0.245 kg de cierto medicamento.
   a) Si producen al mismo ritmo, ¿cuánto medicamento producirán en cuatro semanas y media? ______________________________

   ____

   b) ¿Cuánto tiempo requieren para producir 1.25 kg del medicamento? ______________
3. En una relación de proporcionalidad directa, cuando se tiene una fracción como factor de proporcionalidad, se realizan dos operaciones: una multiplicación y una división.
   a) Si aplican un factor de proporcionalidad 4 a 120, se obtiene:

   ____

   b) Si se aplica al número anterior el factor recíproco de 4, se obtiene:

   ____

   c) Al aplicar los factores de proporcionalidad 3 y $\frac{1}{5}$ a 120, ¿qué fracción representa el factor de proporcionalidad resultante?

   ____

   d) Para aplicar un factor de proporcionalidad de $\frac{2}{7}$ a 49, ¿qué operaciones realizan?

   ____
4. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, coméntenlas en grupo para resolverlas.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones y comparte tu opinión con otro compañero.

1. Si un compañero piensa que para dividir fracciones hay que dividir los numeradores y los denominadores entre sí, ¿qué le dirías?
2. Si una persona piensa que para dividir fracciones hay que dividir solamente los denominadores, ¿qué le dirías?
3. Revisa cómo dividen fracciones tus compañeros y analiza si siguen un procedimiento correcto.

Divisiones de fracciones con distintos procedimientos

Resuelve las siguientes actividades.

1. Resuelve las divisiones de fracciones aplicando el procedimiento de la ley sándwich.

   a) $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{9}$ $\square$ b) $\frac{12}{5}$ y $\frac{5}{6}$ $\square$ c) $\frac{9}{5}$ y $\frac{11}{4}$ $\square$ d) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{8}$ $\square$

2. Encuentra el resultado de las siguientes divisiones de fracciones.

   a) $\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}} = \square$ b) $\dfrac{\frac{7}{9}}{\frac{6}{7}} = \square$ c) $\dfrac{\frac{12}{34}}{\frac{9}{13}} = \square$

3. Encuentra la fracción que hace la igualdad correcta.

   a) $\frac{2}{7} \div \square = \frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{9} \div \square = \frac{1}{6}$ c) $\square \div \frac{4}{11} = \frac{9}{8}$

4. Si se parten tres cuartos de una manzana en cinco partes iguales, ¿qué parte de la manzana es cada una de las cinco partes? ____________________

5. Un lado de un rectángulo mide $\frac{9}{7}$ m y su área es de $\frac{13}{5}$ m^2, ¿cuánto mide el otro lado?

   ____

6. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Discutan los procedimientos para dividir fracciones y comenten situaciones en las que las pueden aplicar.

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Retoma la situación planteada al inicio de la lección y resuelve lo que se pide.
   a) Si las jarras de agua fueran de $1\frac{3}{4}$ L y la capacidad de los vasos fuera de un octavo de litro, ¿cuántos vasos se podrían llenar? ____________________
   b) Comprueba el resultado de tu respuesta: ____________________
2. En un restaurante una lata de $1\frac{1}{2}$ L de aceite de oliva, se sirve en jarras de $\frac{1}{4}$ de litro que se colocan en cada mesa. ¿Cuántas jarras podemos llenar con la lata? __________ ¿Sobra aceite? __________
3. En una construcción, requieren mezclar siete litros de un tipo de pegamento líquido, conocido como *pegol*, con 35 litros de otro líquido llamado *refor*.
   a) Con 100 litros de *pegol*, ¿cuántos litros de *refor* se requieren?

   ____

   ____

   b) Si hay 1 litro de pegol, ¿cuántos litros de *refor* se requerirán? ____________________

4. En una panadería cada tres días se piden $23\frac{1}{2}$ kg de masa de cierto tipo.

   a) ¿Cuánto se pedirá para cinco días? ______________________________

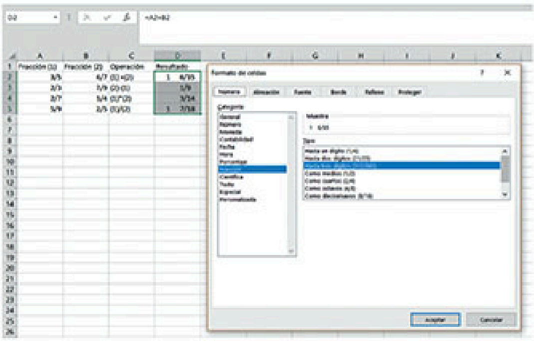
   ____

5. Una persona que recorre $16\frac{1}{4}$ km debe realizar paradas cada $1\frac{5}{8}$ km. ¿Cuántas paradas realizará en total? ______________________________

6. Plantea en tu cuaderno tres problemas similares a los que se trabajaron en esta lección, donde los datos sean fracciones con diferente denominador; después, resuélvelos y comprueba el resultado.

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

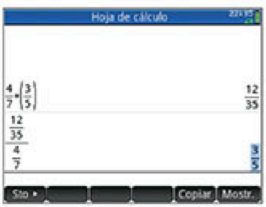
1. En una archivo de una hoja de cálculo electrónica se pueden hacer divisiones de fracciones, basta con poner en cada celda el número cero, seguido de un espacio y luego se escribe la fracción usando el símbolo "/".
   a) Si se introduce un número mixto la secuencia es: 0 -espacio- parte entera -espacio- fracción, usando el símbolo /.
   b) También hay que dar el formato adecuado para el tipo de fracciones que se van a utilizar en "formato de celdas".

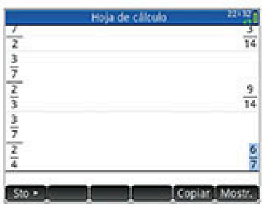


De esta forma se podrá experimentar con distintos valores y comprender con mayor profundidad el uso de fracciones o cambiar datos en un problema y analizar cómo afecta el resultado.

2. Con calculadoras podemos experimentar distintos valores en diversas operaciones y de esta manera explorar más las propiedades numéricas que estemos estudiando. Por ejemplo, las calculadoras multilínea y con posibilidad de realizar operaciones con fracciones pueden ayudarnos a entender los procedimientos de división de fracciones o determinar fracciones que permiten encontrar el valor faltante en alguna operación.

   Puedes experimentar y obtener conjeturas importantes usando la calculadora. Si tienes opotunidad, usa una calculadora de este tipo para resolver divisiones de fracciones.





Eje: Número, álgebra y variación • Tema: Multiplicación y división • **Aprendizaje esperado:** Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

L2 Entre negativos y positivos

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Comportamiento de los signos en la multiplicación

Lee la siguiente información. Después, resuelve lo que se pide.

En matemáticas los conceptos y procedimientos suelen tardar en volverse universales o de uso común. Un caso de esta índole son los números negativos, mismos que muchos matemáticos de renombre de muchas épocas rechazaron porque no se ajustaban a las reglas o propiedades que en ese entonces se conocían sobre los números.

Entonces, matemáticos de otras épocas decidieron incorporarlos, respetando las reglas ya establecidas para otro tipo de números. La siguiente cita pertenecen a Hernan Hankel (1839-1873), matemático alemán, donde expresa sus ideas sobre éstos:

"Ampliar las ideas de números positivos a negativos, respetando la estructura ya conocida de los números (positivos) para conservar 'buenas propiedades".

Hay algunas situaciones que implican el uso de números negativos y se puede conjeturar el tipo de comportamiento que deben tener. Modelos como el de ganancias y pérdidas sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva de los enteros, pero son ineficientes para lograr una comprensión de la estructura de la multiplicación.

1. Escribe una situación en las que sea necesario operar con números positivos y negativos.

____

   a) Si Pedro tiene un saldo de −$1 285 y paga $750, ¿cuál es su nuevo saldo? ________

   b) ¿Cuál es el resultado de sumar (−6) + (−6)? ________

2. Escribe la suma repetida del mismo número para las siguientes multiplicaciones y resuélvelas.

   a) $3 \times (+4) =$ ________

   b) $5 \times (-2) =$ ________

   c) ¿Cuál debe ser el resultado de $(+4) \times 3$? ________

3. Comparte tus resultados con los de otro compañero. Discutan lo siguiente: ¿qué sucede al multiplicar un número natural por uno negativo? Si se invierten los factores, ¿el orden de los factores modifica el resultado de una multiplicación?

Sucesión de multiplicaciones

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.
Los nuevos números, los números positivos y negativos deberían respetar que "el orden de los factores no altera el producto".

1. Para reforzar lo anterior y establecer una conjetura sobre las reglas para multiplicar números positivos y negativos, analicen la siguiente sucesión y escriban los resultados.

   a) ... $4 \times 3 =$ _____, $3 \times 3 =$ _____, $3 \times 2 =$ _____, $3 \times 1 =$ _____, $3 \times 0 =$ _____,

   $3 \times (-1) =$ _____, $3 \times (-2) =$ _____, $3 \times (-3) =$ _____, $3 \times (-4) =$ _____, ...

   Esto sería lo mismo que si ponemos signo a los números naturales implicados, por ejemplo: $(+3) \times (+2)$, $(+3) \times (+1)$, $(+3) \times 0$, $(+3) \times (-1)$, etcétera, debido a que podemos o no omitir el signo de los números positivos y no habría confusión.

2. Utilicen los resultados de la sucesión anterior para completar la siguiente.

   a) ... $(-4) \times (+3) =$ _____, $(-3) \times (+3) =$ _____, $(-3) \times (+2) =$ _____, $(-3) \times (+1) =$ _____,

   $(-3) \times 0 =$ _____, $(-3) \times (-1) =$ _____, $(-3) \times (-2) =$ _____, $(-3) \times (-3) =$ _____,

   $(-3) \times (-4) =$ _____, ...

3. Anoten los resultados de la siguiente sucesión de multiplicaciones.

   a) ... $5 \times 4 =$ _____, $5 \times 3 =$ _____, $5 \times 2 =$ _____, $5 \times 1 = 5$, $5 \times 0 =$ _____, $5 \times (-1) =$ _____,

   $5 \times (-2) =$ _____, $5 \times (-3) =$ _____, $5 \times (-4) =$ _____, ...

   b) ... $(+8) \times (+4) =$ _____, $(+8) \times (+3) =$ _____, $(+8) \times (+2) =$ _____, $(+8) \times (+1) =$ _____, $(+8) \times 0$

   $=$ _____, $(+8) \times (-1) =$ _____, $(+8) \times (-2) =$ _____, $(+8) \times (-3) =$ _____, $(+8) \times (-4) =$ _____, ...

   c) ... $(-12) \times (+4) =$ _____, $(-12) \times (+3) =$ _____, $(-12) \times (+2) =$ _____, $(-12) \times (+1) =$ _____, (-12)

   $\times 0 =$ _____, $(-12) \times (-1) =$ _____, $(-12) \times (-2) =$ _____, $(-12) \times (-3) =$ _____, $(-12) \times (-4) =$ _____, ...

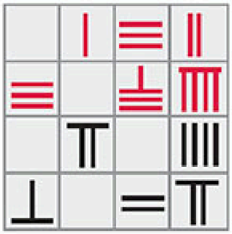
4. Analicen las sucesiones de multiplicaciones anteriores y respondan lo siguiente.

   a) Cuando se multiplican dos números: uno positivo y uno negativo, ¿qué signo tiene el resultado? ____________________

   b) Cuando se multiplican dos números positivos o dos negativos, ¿qué tipo de número corresponde el resultado? ____________________

Modelo de configuraciones y signo de multiplicaciones de números positivos y negativos

Lee la siguiente información. Después, resuelve lo que se pide.

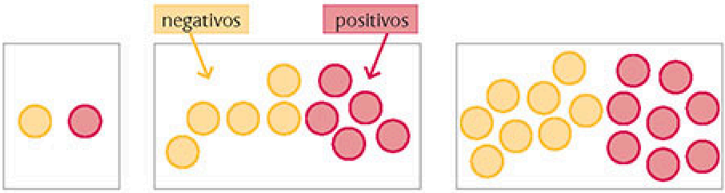


En el sistema de numeración china, que data del año 200 antes de nuestra era, se representaban los números positivos en color rojo y los negativos en color negro, como muestra la imagen de la izquierda.

Este tipo de representaciones se usaba para cálculos comerciales y fiscales, donde las barras negras eran nulificadas por las barras rojas. La cantidad vendida se representaba con barras negras y la gastada con barras de color rojo.

De acuerdo con este tipo de registro, puedes abordar las multiplicaciones de números positivos y negativos con fichas de colores. Se trata de trabajar con dos tipos de fichas, por ejemplo, rojas para números positivos y amarillas para números negativos.

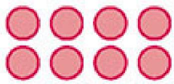
Es importante que consideres que cuando hay la misma cantidad de fichas rojas y amarillas, se dice que hay un equilibrio y se traduce como "cero".



El juego se trata de agregar o quitar tantas fichas cuando se indique "agregar" (signo positivo) o "quitar" (signo negativo). Para iniciar se puede considerar un tablero sin fichas o con un equilibrio, según se requiera.

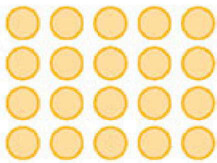
1. Escribe la multiplicación que representa las siguientes configuraciones.

a) Pon cuatro veces (+2).



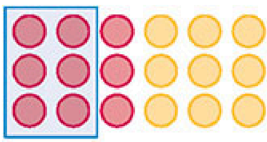
____

b) Pon cinco veces (−4).



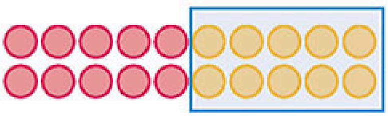
____

c) Quita dos veces (+3).



____

d) Quita cinco veces (−2).



____

2. Representa con fichas de colores cada una de las siguientes situaciones.
   a) Pon tres veces dos fichas rojas.

      Resultado: ______
   b) Pon tres veces dos fichas amarillas.

      Resultado: ______
   c) Inicia con un equilibrio y quita tres veces dos fichas rojas.

      Resultado: ______
   d) Inicia con un equilibrio y quita tres veces dos fichas amarillas.

      Resultado: ______

3. ¿Qué operación aritmética sugieren las representaciones de los incisos anteriores?

   Explica tu respuesta. ______

   ______

4. Responde las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuántas veces hay que poner o quitar tres fichas rojas para obtener doce fichas rojas?

      ______

      - Escribe una operación que representa esta situación. ______
   b) ¿Cuántas veces hay que poner o quitar tres fichas amarillas para obtener doce fichas amarillas? ______

      - Escribe la operación que representa esta situación. ______
   c) Si se tiene un equilibrio, ¿cuántas veces hay que poner o quitar tres fichas rojas para obtener doce fichas amarillas? ______

      - Escribe la operación que representa esta situación. ______
   d) ¿Cuántas veces hay que poner o quitar tres fichas amarillas para obtener doce fichas rojas? ______

      - Escribe la operación que representa esta situación. ______

5. Comparte tus resultados con los de otro compañero. Discutan sobre los productos al multiplicar números positivos y negativos al trabajar con las fichas de colores y cómo funciona este procedimiento. Escriban sus conclusiones en su cuaderno.

P1 L2

Multiplicaciones de números con positivos y negativos

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Determinen si es positivo o negativo el número del producto de los siguientes arreglos de fichas.
   a) Pon dos veces tres fichas rojas.

   Operación: ____________ Tipo de número (positivo o negativo): ____________

   b) Pon cuatro veces tres fichas amarillas.

   Operación: ____________ Tipo de número (positivo o negativo): ____________

   c) Quita tres veces dos fichas rojas.

   Operación: ____________ Tipo de número (positivo o negativo): ____________

   d) Quita tres veces dos fichas amarillas.

   Operación: ____________ Tipo de número (positivo o negativo): ____________

2. Realicen las siguientes operaciones de números positivos y negativos. Primero anoten si es positivo o negativo y después el resultado, finalmente, compruébenlo con las fichas.

a) $(-5) \times (+4)$ Anticipen si el resultado es positivo o negativo: ____________ Resultado: ____

b) $(+8) \times (-9)$ Anticipen si el resultado es positivo o negativo: ____________ Resultado: ____

c) $(-7) \times (-8)$ Anticipen si el resultado es positivo o negativo: ____________ Resultado: ____

d) $(+6) \times (+9)$ Anticipen si el resultado es positivo o negativo: ____________ Resultado: ____

3. A partir de los ejercicios anteriores, determinen si el resultado es un número positivo o negativo en las siguientes operaciones.

   a) $(-12\,534) \times 53\,106$ ______________ b) $(-99\,042) \times (-47\,902)$ ______________

4. Analicen y respondan lo siguiente.

   a) Un número negativo elevado al cuadrado, es decir, multiplicado por sí mismo, ¿puede dar como resultado un número negativo? Expliquen su respuesta. ______________

   ____

   b) El producto de dos números naturales es mayor que cualquiera de los factores, ¿esto obliga a que suceda lo mismo con los números positivos y negativos? Expliquen su respuesta. ____

APRENDEMOS

Al multiplicar números positivos y negativos se puede establecer la siguiente regla:

Primer factor	Segundo factor	Producto
Número positivo	Número positivo	Número positivo
Número positivo	Número negativo	Número negativo
Número negativo	Número positivo	Número negativo
Número negativo	Número negativo	Número positivo

Es importante que tengas en mente esta regla para realizar operaciones con números positivos y negativos, esto evitará problemas en el manejo de otros temas, como los de álgebra o trigonometría que verás en tercer grado.

Al resolver multiplicaciones, por comodidad a veces se omite el signo positivo en los números que los llevan. Por ejemplo:

$(+14) \times (+23) = 14 \times 23$ $\qquad$ $(+14) \times (-23) = 14 \times (-23)$

También por comodidad se omite el signo de multiplicación y se sustituye por paréntesis. Por ejemplo:

$(+14)(+23) = 14 \times 23$ $\qquad$ $(+14)(-23) = 14(-23)$ $\qquad$ $(-14) \times (-23) = (-14)(-23)$

Cuando se multiplica por 1, se puede omitir el número 1:

$$1 \times 23 = 23, 1 \times (-23) = (-23)$$

Pero cuando se multiplica por (–1), debe considerarse el signo si se quiere omitir el número 1:

$$(-1) \times (+23) = -23, (-1) \times (-23) = -(-23).$$

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente situación. Después, resuelve lo que se pide.

1. Algunos estudiantes piensan que son correctas las siguientes igualdades. ¿Estás de acuerdo?

   $(-2)(-3) = -2\ -3$ $\qquad$ $5(-2) = 5 - 2$ $\qquad$ $(+3)(+2) = 32$

2. En caso de no ser correctas, escribe expresiones que sí lo sean.

TAREA

Considera las reglas de los signos y realiza lo que se pide.

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones.

a) $(-31) \times (16) =$ ________ b) $(+102) \times (-17) =$ ________

c) $(-15) \times (-60) =$ ________ d) $(+12) \times (+3) =$ ________

2. Anota los factores que falten en cada multiplicación.

a) $(-11) \times ($ ______ $) = -11$ b) $(-7) \times ($ ______ $) = 42$

c) $(+9) \times ($ ______ $) = -540$ d) $(+15) \times ($ ______ $) = 75$

CONCLUIMOS — Crea y evalúate

Resuelve los ejercicios y problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones de números positivos y negativos.

a) $(-4)(-7) =$ ________ b) $(-5)(-3) =$ ________ c) $(-9)(-9) =$ ________

2. Si tuvieras una multiplicación que tuviera más de dos factores, como por ejemplo: $(-5)(-2)(-4) =$, describe cómo procederías para realizarla. ________________

____

a) ¿Qué harías en el caso de un producto como $(-1)(+2)(-5)(+9)$?

____

Juan dice que él realizará lo siguiente, primero realizará $(-1)(+2) =$ ________, después realizará $(-5)(+9) =$ ________ y al final realizará el producto de los resultados antes obtenidos.

Paty dice que ella multiplicará primero los números positivos $(+2)(+9) =$ ________ y después los negativos $(-1)(-5) =$ ________, y al final el producto de los resultados obtenidos.

b) ¿Ambos llegarán al mismo resultado? ________________

c) ¿Ambos procedimientos son correctos? Explica por qué. ________________

____

Tic

En la página web https://goo.gl/xwRSnA, realiza las actividades de repaso de multiplicaciones de números positivos y negativos.

3. Escribe una operación para resolver las siguientes situaciones, tratando de interpretar las cantidades involucradas como números positivos o negativos. Después, escribe el resultado.

a) En un juego se perdieron tres veces 15 pesos, ¿cuánto pesos se tienen? ____________

Operación: ________________________________

b) Si la moneda de un país pierde en ocho ocasiones consecutivas 12 centavos, ¿cuánto pierde en total? ____________ Operación: ____________

c) En la bolsa de valores se tuvo una pérdida de siete puntos durante cinco días consecutivos, ¿cuántos puntos se perdieron en ese periodo? ____________

Operación: ________________________________

4. Completa la siguiente tabla, anotando si el producto obtenido de multiplicar dichos factores es un número positivo o negativo.

Primer factor	Segundo factor	Tercer factor	Producto (resultado)
Número positivo	Número positivo	Número negativo	
Número positivo	Número negativo	Número negativo	
Número positivo	Número positivo	Número positivo	
Número positivo	Número negativo	Número positivo	

5. Lee atentamente el problema y resuelve lo que se pide.
Carlos adquirió un préstamo de $4 500.00 a liquidar en 12 semanas. Cada semana paga un interés de $55.00. ¿Cuánto pagará al final del plazo? ____________

a) Escribe las operaciones, utilizando números positivos y negativos.

____

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Las calculadoras gráficas multilínea y con la posibilidad de cambiar el signo de un número permiten experimentar con distintos casos y realizar ensayos de operaciones de números positivos y negativos. A cada número se le cambia el signo con una tecla del tipo: *m*.

2. En una hoja de cálculo electrónica también puedes resolver multiplicaciones de números positivos y negativos.

a) En la columna A escribe una sucesión de números descendente de 1 en 1, que incluya números positivos y negativos.

b) En la columna B escribe la fórmula: =A1*(−2). Después arrastra el cursor hacia abajo para obtener la sucesión de multiplicaciones.

c) Prueba con diferentes números positivos y negativos en la columna B.

L3 Multiplicaciones del mismo factor

COMENZAMOS Reflexiona y discute

Leyenda del ajedrez

Lee y analiza la información. Después, resuelve los problemas.

1. Se dice que el juego de ajedrez se inventó en la India hace muchos años. Había un rey indio, llamado Sheram, que lo jugó y quedó sorprendido de sus ingeniosas reglas y de la variedad de combinaciones que se podían realizar con las piezas. El rey Sheram recibió a Sissa, un solitario sabio que vivía modestamente. Él decía haber inventado el juego de ajedrez, por lo que el rey le ofreció una recompensa.

Se cuenta que Sissa le dijo al rey lo siguiente: " Oh, gran soberano, ordene que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos semillas por la segunda casilla; por la tercera casilla, cuatro granos; por la cuarta casilla, ocho; por la quinta casilla, dieciséis; por la sexta casilla, treinta y dos; y así sucesivamente... ". El rey pensó que era una petición modesta y a pesar de que se sentía ofendido porque podía ofrecerle mucho más, ordenó que entregaran el trigo que Sissa solicitaba.

El número de semillas que tiene que entregar el rey por la casilla 1 es 1; por la casilla 2, $1 \times 2 = 2$ semillas.

a) ¿Cuántas semillas tiene que entregar el rey por la casilla 3? Escribe la respuesta como una multiplicación. ______

b) Escribe como una multiplicación el número de semillas que tiene que entregar el rey al sabio por cada una de las siguientes casillas.

Casilla 4: ______ Casilla 6: ______

Casilla 8: ______

2. Calcula el total de granos que debe entregar el rey a Sissa por las primeras cinco casillas del tablero. Escribe las operaciones y el resultado: ______

a) ¿Cuántos granos recibirá Sissa por las primeras nueve casillas del tablero? Escribe las operaciones y el resultado: ______

b) Calcula la cantidad de granos que deben entregarle a Sissa por las primeras 20 casillas del tablero. ______

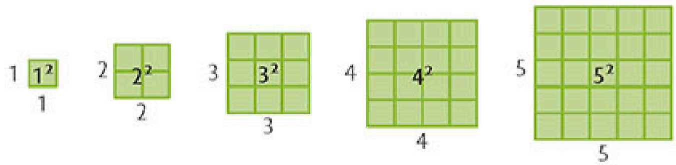
3. Compara tus respuestas y procedimientos con los de otro compañero. ¿Habrá alguna manera de expresar de forma abreviada las multiplicaciones?

______

Cuadrados y cubos

En pareja, lean la información. Después, resuelvan lo que se pide.

Cuando se multiplica un número por sí mismo, se dice que se "eleva al cuadrado", lo que seguramente te recuerda la forma de calcular el área de un cuadrado. Es decir, el área de un cuadrado de lado 1 es 1^2; el área de un cuadrado de lado 2 es 2^2, que es igual a cuatro cuadrados de lado 1; 3^2 representa un cuadrado de lado 3, etcétera.

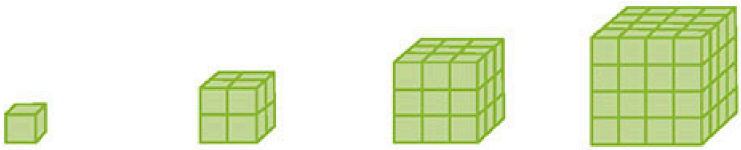


Al multiplicar un número por sí mismo o al calcular el área de un cuadrado, se obtiene el "cuadrado del número", o se calcula la "segunda potencia".

1. Escriban la multiplicación que representa el cuadrado de los siguientes números.

a) 3^2 = ______________ b) 11^2 = ______________ c) 145^2 = ______________

Análogamente, cuando se multiplica un número por sí mismo tres veces, se dice que se "eleva al cubo" o se "eleva a la potencia tres" o se "eleva a la tercera potencia".

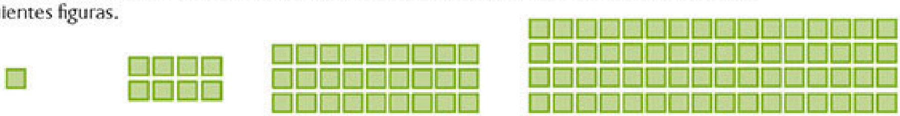


$1 \times 1 \times 1 = 1^3$ $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ $4 \times 4 \times 4 = 4^3$

2. Escriban la multiplicación y el producto de los siguientes números elevados al cubo.

a) 3^3 = ______________ b) 11^3 = ______________ c) 145^3 = ______________

Lo anterior, en vez de usar cubos, se puede representar repitiendo varias veces agrupaciones de cuadrados: 1^3 es una vez un cuadrado de lado 1; 2^3 es dos veces un cuadrado de lado 2; 3^3 es tres veces un cuadrado de lado 3, y así sucesivamente, como pueden observar en las siguientes figuras.



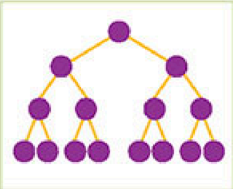
$1 \times 1^2 = 1^3$ $2 \times 2^2 = 2^3$ $3 \times 3^2 = 3^3$ $4 \times 4^2 = 4^3$

3. Escriban con dos factores el cubo de los siguientes números y resuélvanlos.

a) 7^3 = ______________ b) 15^3 = ______________ c) 23^3 = ______________

Reproducción de bacterias

En parejas, lean la información. Después, resuelvan lo que se pide.



1. Las bacterias se reproducen por bipartición, esto es, de una se forman dos; luego, por cada una de ellas otras dos y así sucesivamente, como muestra la ilustración de la izquierda.

   Cuando hay comida de sobra, una bacteria tarda un segundo desde que nace hasta que se vuelve a dividir en dos.

   a) Si consideramos una sola bacteria, ¿cuántas bacterias habrá después de cinco segundos?

   Utiliza la calculadora. ____________________

   b) ¿Cuántas bacterias habrá después de ocho segundos? ____________________

   c) ¿Cuántas bacterias habrá después de 15 segundos? ____________________

   d) Describan las operaciones que realizaron en la calculadora. ____________________

   ____

APRENDEMOS

A las expresiones 7^2, 9^3, 11^5, 15^9 y 20^{22}, se les denomina **potencias**. Por ejemplo, en el caso de 7^2, se le llama **exponente** al número 2 (superíndice) y al número 7 se le llama **base**:

$$(Base)^{(exponente)}$$

El exponente indica el número de veces que se debe multiplicar la base por sí misma, por ejemplo:

$$7^2 = 7 \times 7 = 49; \qquad 9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

Cuando se multiplica un número por sí mismo varias veces se dice que está elevado a la potencia que indica el número de veces que aparece como factor:

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ (dos a la cuarta potencia)}$$

2. Para calcular las siguientes potencias, escriban el número que se debe multiplicar, el número de veces y la potencia a la que está elevado, como muestra el ejemplo.

   a) 6^2: se multiplica el número seis dos veces por sí mismo (seis a la segunda potencia).

   b) 11^3: ____________________

   c) 56^7: ____________________

   d) 105^9: ____________________

   e) 240^{25}: ____________________

3. A partir del problema de las bacterias, resuelvan lo que se pide. Utilicen la calculadora.

a) Escriban como potencia el número de bacterias que habrá después de dos y tres segundos. Consideren que se empieza con una.

- 2 segundos: ________________
- 3 segundos: ________________

b) De acuerdo con lo anterior, calculen el producto de 2^2 por 2^3: ________________

c) Anoten la potencia que corresponde al número de bacterias después de cinco segundos y calculen el producto correspondiente: ________________

d) ¿Qué relación hay entre los resultados de los incisos b y c, y la suma de los exponentes 2 y 3 con el exponente 5? ________________

____

e) Escriban como potencia las bacterias que habrá en ocho segundos y cuántas son:

____

f) Calculen el producto de 2^3 y 2^5: ________________

g) ¿Qué relación hay entre los exponentes 3 y 5 con el exponente 8? ________________

h) ¿Cuántas bacterias habrá después de 13 segundos? ________________

i) Sin hacer operaciones, y de acuerdo con lo visto, ¿cuál creen que sea el producto de $2^8 \times 2^5$? ________________

4. Supongan que la bacteria en cuestión es portadora de una enfermedad para los humanos.

a) Si cada bacteria infecta a una persona, ¿cuántas personas estarían infectadas en medio minuto? Escriban la potencia correspondiente y resuelvan. ________________

5. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. ¿Qué relación hay entre el producto de potencias y los exponentes correspondientes?

Discutan lo anterior y escriban los acuerdos a los que llegaron en su cuaderno.

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Anota como potencias las siguientes multiplicaciones.

a) $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ______ b) $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 =$ ______

2. Calcula el resultado de las siguientes potencias.

a) $4^4 =$ ________ b) $5^4 =$ ________ c) $8^5 =$ ________

Producto de potencias

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Observen las siguientes secuencias de potencias y completen la tabla.

Exponente	Base 2	Base 5	Base 9	Base 12
4	2^4	5^4		
3				
2				
1				

a) Si 2^3 es igual a multiplicar tres veces 2: $2 \times 2 \times 2 = 8$, y 2^2 es igual a multiplicar dos veces 2: $2 \times 2 = 4$, ¿cuál será el producto de 2^1? ____________________

Por convención, se dice que cualquier número con exponente 1 es igual al mismo número, es decir, $n^1 = n$.

2. Resuelve las siguientes expresiones.

a) $1^1 =$ ______ b) $28^1 =$ ______ c) $39^1 =$ ______ d) $147^1 =$ ______

Por lo anterior, un número al cubo se puede escribir de la siguiente manera:

$1^1 \times 1^2 = 1^{1+2} = (1)(1 \times 1) = 1^3$ $\quad 2^1 \times 2^2 = 2^{1+2} = 2^3$ $\quad 3 \times 3^2 = 3^{1+2} = 3^3$

3. En su cuaderno, resuelvan las multiplicaciones anteriores y calculen las potencias al cubo para validar que se cumplen las igualdades.

4. Analicen la siguiente igualdad: $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ y expliquen qué relación tiene con la multiplicación: $2^2 \times 2^2$, con 2^4. ____________________

____

5. Escriban las potencias como producto de dos potencias de la misma base, de distintas formas. Consideren que $6^7 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 279\,936$.

a) $6^7 = 6^3 \times 6^4 = (6 \times 6 \times 6) \times (6$ __________ $) = 216 \times$ __________ = __________

b) $6^7 =$ ____________________

c) $6^7 =$ ____________________

6. Escriban cómo se relacionan el producto de dos potencias de la misma base ($4^3 \times 4^7$) con sólo una potencia de la misma base (4^{10}). Comparen sus conclusiones con las de otra pareja; en caso de que existan diferencias, comenten en busca de acuerdos.

TAREA

Resuelve los siguientes ejercicios. Al final, valida tus resultados con un compañero.

1. Escribe el exponente que corresponde para obtener el resultado que se indica.

a) $2^{\square} = 64$ b) $4^{\square} = 64$ c) $3^{\square} = 27$ d) $5^{\square} = 625$

2. Completa las siguientes igualdades para que sean correctas.

a) $2^5 = 2^{2+\square} = 2^2 \times 2^{\square}$ b) $5^9 = 5^{\square+5} = 5^{\square} \times 5^5$

3. Escribe la potencia que resulta al considerar los siguientes productos de potencias.

a) $3^3 \times 3^5 =$ ________ b) $9^2 \times 9^7 =$ ________ c) $25^9 \times 25^6 =$ ________

Exponente cero

Analiza las siguientes sucesiones de potencias. Después, resuelve lo que se pide.

1. $2^7 = 128$, $2^6 = 64$, $2^5 = 32$, $2^4 = 16$, $2^3 = 8$, $2^2 = 4$, $2^1 = 2$, $2^0 = ?$

   a) ¿Qué valor será razonable para 2^0? ________________

   b) Considera que $2^3 = 2^{3+0} = 2^3 \times 2^0 = (2 \times 2 \times 2) \times (?)$; entonces, ¿qué valor debería tener 2^0? ________________

2. Veamos otro caso: $1^7 = 1$, $1^6 = 1$, $1^5 = 1$, $1^4 = 1$, $1^3 = 1$, $1^2 = 1$, $1^1 = 1$, $1^0 = ?$

   a) ¿Qué valor será razonable para 1^0? ________________

   b) Considera que $1^4 = 1^{4+0} = 1^4 \times 1^0$; entonces, ¿qué valor debería tener 1^0? ________

3. Otro caso más: $5^6 = 15\,625$, $5^5 = 3\,125$, $5^4 = 625$, $5^3 = 125$, $5^2 = 25$, $5^1 = 5$, $5^0 = ?$

   a) Tomando en cuenta lo anterior, ¿cuál sería el valor de 5^0? ________________

   b) Considera que $5^4 = 5^{4+0} = 5^4 \times 5^0$, así que 5^0 debe resultar igual a: ________

   c) ¿Por qué número multiplicas un número para obtener el mismo número? ________

4. Resuelve las siguientes sucesiones de potencias.

   a) $3^5 =$ ______, $3^4 =$ ______, $3^3 =$ ______, $3^2 =$ ______, $3^1 =$ ______, $3^0 =$ ______

   b) $11^4 =$ ______, $11^3 =$ ______, $11^2 =$ ______, $11^1 =$ ______, $11^0 =$ ______

5. Resuelve las siguientes potencias.

   $9^0 =$ ______ $7^0 =$ ______ $17^0 =$ ______ $59^0 =$ ______ $325^0 =$ ______

6. Escribe una regla para determinar el resultado de una potencia con exponente cero. Compara tu regla con la de otro compañero y valídenla con el profesor.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, discútelas con un compañero.

1. Si un amigo te dice que como $2^2 = 2 \times 2 = 4$; entonces, $5^2 = 2 \times 5 = 10$. ¿Qué le dirías?
2. Si un amigo te dice que $3^4 + 3^4 = 3^8$, ¿qué le dirías?

Potencias de potencias

En pareja, lean la información. Después, resuelvan lo que se pide.

Durante las actividades previas, vimos que una potencia representa una multiplicación reiterada del mismo factor, por ejemplo: $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Y también multiplicamos potencias de la misma base, por ejemplo: $3^3 \times 3^2 = (3 \times 3 \times 3)(3 \times 3) = 3^{3+2} = 3^5$.

Pero también hay casos en los que una potencia se multiplica reiteradamente, por ejemplo: $2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = (2^3)^4$, lo que se conoce como potencia de una potencia.

1. Escriban los siguientes casos como una potencia de una potencia.

   a) $3^3 \times 3^3 =$ _______ b) $4^5 \times 4^5 \times 4^5 =$ _______ c) $23^3 \times 23^3 \times 23^3 \times 23^3 \times 23^3 =$ _______

2. Ahora, escriban las potencias de potencias como el producto de multiplicaciones reiteradas y como una sola potencia. Observen el ejemplo.

   a) $5^2 \times 5^2 = (5 \times 5)(5 \times 5) =$ ____________________

   b) $14^3 \times 14^3 \times 14^3 =$ ____________________

   c) $10^2 \times 10^2 \times 10^2 \times 10^2 =$ ____________________

3. Utilicen la calculadora para comprobar que las siguientes igualdades son correctas y escriban el resultado correspondiente.

   a) $(3^2)^3 = 3^6 =$ _______ b) $(9^3)^3 = 9^9 =$ _______ c) $(11^4)^2 = 11^8 =$ _______

4. A partir de las regularidades, escriban una regla para determinar el valor del exponente de la potencia, que es el resultado de una potencia de potencia de la misma base.

   ____

5. Validen sus conjeturas con otra pareja y con el profesor.

TAREA

Resuelve los siguientes ejercicios para practicar lo aprendido.

1. Escribe el resultado de las siguientes potencias de potencias.

   a) $(37^2)^0 =$ _______ b) $(149^0)^{13} =$ ___ c) $(111^{17})^0 =$ ___ d) $(23457^{123})^0 =$ ___

2. Encuentra la potencia que corresponde a cada una de las siguientes expresiones.

   a) $(7^5)^6 = 7^{\square}$ b) $(23^9)^7 = 23^{\square}$ c) $(179^{11})^{13} = 179^{\square}$

La potencia cero y las potencias negativas

En equipo, resuelvan las siguientes actividades sobre cocientes de potencias.

Como sabes, al dividir cualquier número entre sí mismo el resultado siempre es uno.

1. Encuentren el resultado de las siguientes divisiones.

a) $\frac{5}{5} = \frac{5^1}{5^1} =$ ____ b) $\frac{16}{16} = \frac{4^2}{4^2} =$ ____ c) $\frac{125}{125} = \frac{5^3}{5^3} =$ ____

d) $\frac{64}{64} = \frac{2^6}{2^6} =$ ____ e) $\frac{1331}{1331} = \frac{11^3}{11^3} =$ ____

2. Escriban los resultados anteriores como una potencia, donde la base sea la base correspondiente en cada caso.

a) $\frac{5^1}{5^1} =$ ____ b) $\frac{4^2}{4^2} =$ ____ c) $\frac{5^3}{5^3} =$ ____ d) $\frac{2^6}{2^6} =$ ____ e) $\frac{11^3}{11^3} =$ ____

f) ¿Qué relación hay entre el exponente del resultado y los exponentes de las divisiones?

____

3. Hagan los cálculos necesarios y escriban los cocientes de las siguientes divisiones.

a) $\frac{5^3}{5^1} =$ ____ b) $\frac{4^3}{4^2} =$ ____ c) $\frac{5^5}{5^3} =$ ____ d) $\frac{2^8}{2^6} =$ ____ e) $\frac{11^3}{11^1} =$ ____

4. Escriban los cocientes anteriores como potencias, usando la misma base.

a) $\frac{5^3}{5^1} =$ ____ b) $\frac{4^3}{4^2} =$ ____ c) $\frac{5^5}{5^3} =$ ____ d) $\frac{2^8}{2^6} =$ ____ e) $\frac{11^3}{11^1} =$ ____

f) ¿Qué relación observan entre los exponentes de la división y el exponente del cociente?

____

g) ¿Es correcto pensar que $\frac{7^3}{7^1} = 7^{3-1} = 7^2$? Justifiquen su respuesta.

____

5. Escriban los cocientes anteriores como potencias, usando la misma base.

a) $\frac{9^6}{9^3} = 9^{\square} = 9^{\square}$ b) $\frac{15^5}{15^2} = 15^{\square} =$ ____ c) $\frac{11^6}{11^4} =$ ____ $=$ ____

¿Qué sucede cuando el exponente del numerador es menor que el exponente del denominador?

6. Resuelvan las siguientes operaciones y escriban la fracción simplificada. Observen el ejemplo:

a) $\frac{6^4}{6^5} = \frac{1296}{7776} = \frac{1}{6}$ b) $\frac{9^3}{9^4} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$ c) $\frac{10^1}{10^2} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}} = \boxed{\frac{\quad}{\quad}}$

d) Si representaran los resultados como potencias de la misma base, ¿qué exponente asignarían en cada caso? ______________________________

7. Escriban la potencia negativa que resulta en las siguientes divisiones.

a) $\frac{\quad}{\quad} = 6^{\_\_\_}$ b) $\frac{9^{12}}{9^{14}} = 9^{\_\_\_}$ c) $\frac{11^{9}}{11^{11}} = 11^{\_\_\_}$

d) $\frac{\quad}{6^{7}} = 6^{\_\_\_}$ e) $\frac{9^{1}}{9^{5}} = 9^{\_\_\_}$ f) $\frac{11^{7}}{11^{8}} = 11^{\_\_\_}$

Reflexionen y comenten: ¿es posible considerar los exponentes negativos como recíprocos de números con exponente positivo?

Tic

Ingresa a https://goo.gl/r2JM3P, ahí podrás resolver problemas sobre potencias.

8. Encuentren la potencia que corresponde a las siguientes expresiones.

a) $\frac{7^{5}}{7^{6}} = 7^{\_\_\_}$ b) $\frac{17^{9}}{17^{14}} = 17^{\_\_\_}$ c) $\frac{261^{5}}{\quad} = 261^{\_\_\_}$

9. Realicen los cálculos necesarios y verifiquen que la siguiente igualdad se cumple: $\frac{7^{3}}{7^{5}} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^{2}}$. Después, completen las siguientes potencias.

a) $\frac{15^{5}}{\quad} = 15^{\_\_\_} = 15^{\_\_\_} = \boxed{\frac{1}{\quad}}$ b) $\frac{123^{6}}{123^{9}} = \_\_\_ = \_\_\_ = \boxed{\frac{1}{\quad}}$

10. Escriban una regla para dividir potencias de la misma base. ¿Cómo se pueden representar potencias con exponente negativo como potencias con exponente positivo?

____

____

____

APRENDEMOS

Al trabajar con una expresión del tipo a^{n} se le denomina potencia, a n se le llama **exponente** y **a** es la **base** de la potencia.
Cuando en una potencia con $a \neq 0$ y el exponente es cero, el resultado es 1: $a^{0} = 1$.
Cuando en una potencia el exponente es uno, el resultado es el mismo número: $a^{1} = a$.
Cuando se multiplican potencias de la misma base, el resultado se puede escribir como una potencia con la misma base con un exponente igual a la suma de los exponentes de los factores: $a^{n} \times a^{m} = a^{n+m}$
En el caso de potencias de potencias con la misma base, se puede escribir como una potencia con la misma base con un exponente igual al producto de los exponentes:

$$(a^{n})^{m} = a^{n \times m}$$

Al dividir potencias de la misma base, el resultado se puede escribir como una potencia con la misma base, y exponente igual a la diferencia del exponente del dividendo menos el del divisor.

$$\frac{a^{n}}{a^{m}} = a^{n-m}$$

Recuerda que los divisores no pueden ser 0.
Una potencia con exponente negativo (a^{-m}) es equivalente a una fracción unitaria con exponente positivo, es decir, $a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}$.

Crea y evalúate

CONCLUIMOS

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido.

1. Retoma la situación planteada al inicio de la lección para resolver lo que se pide.

   a) ¿Cómo escribirías como potencia la cantidad de granos de la casilla 1? ____________

   b) Escribe como potencia el número de granos que entregó el rey por las casillas 5, 10, 24 y 36: ____________

   c) Si n representa el número de casillas, ¿qué expresión, como potencia, representa el número de granos en cada casilla? ____________

La suma de potencias de dos: $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$, hasta llegar a 2^{63} es una cantidad muy grande. Sissa pidió al rey: 18 446 744 073 709 551 615 granos, si se considera la producción de granos de trigo a nivel mundial a principios de la primera década del presente siglo, se requerirían más de 1 000 años para darle a Sissa la cantidad que pidió.

2. Encuentra el exponente que hace que las siguientes expresiones sean correctas.

   a) $8^4 \times 8^{\square} = 8^7$ b) $9^5 \times 9^{\square} = 9^8$ c) $7^9 \times 7^{\square} = 7^{13}$

   d) $(33^{\square})^8 = 33^{16}$ e) $(109^8)^{\square} = 109^{56}$ f) $(101^{\square})^{\square} = 101^{21}$

   g) $\frac{7^5}{7^{\_\_}} = 7^4$ h) $\frac{27^{\_\_}}{27^{14}} = 27^2$ i) $\frac{416^8}{416^{\_\_}} = 416^6$

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Puedes utilizar una hoja de cálculo electrónica para comprender más sobre el uso de potencias. Por ejemplo, se pueden analizar las diferencias entre potencias con exponentes positivos y negativos. Usa la fórmula $= n^m$.

   O sólo comprobar algunos resultados o conjeturas. Utiliza la hoja electrónica para comprobar el efecto de exponentes como, 0, 1 y −1.

=A2^B2

	A	B	C	D	E	F
1	Números	Exponente positivo	Exponente negativo	Resultado con exponente positivo	Resultado con exponente negativo	
2	5	3	-5	125	0.00032	
3	7	2	-6	49	8.4999E-06	
4	17	5	-3	1419857	0.00020354	
5	3	4	-3	81	0.03703704	
6	12	6	-1	2985984	0.08333333	
7						
8						

2. Las calculadoras multilínea o gráficas pueden ayudar a explorar operaciones con potencias diferentes.

L4 Relaciones de proporcionalidad

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Proporcionalidad para aumentar o disminuir

Lee la información. Después, resuelve el problema.

1. Para un evento especial, se mandaron a hacer camisetas para las edecanes y personal de producción. Cada camiseta tuvo un costo de \$350.00.
   a) Completa la siguiente tabla.

Camisetas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Costo (\$)												

   b) ¿Cómo se obtiene el costo de acuerdo con la cantidad de camisetas? Explícalo. ________

   ____

   c) Calcula el costo de la cantidad de camisetas que se muestran en la tabla.

Camisetas	25	50	80	204	250	500	1000
Costo (\$)							

   d) Hay alguna relación entre la cantidad de camisetas y el costo de las mismas. ¿Qué sucede con el costo si aumenta el número de camisetas?

   ____

   e) Si el costo se incrementa, ¿qué indica esto? ________________
   f) ¿Qué sucede si se divide el costo de cierto número de camisetas entre el número de camisetas? ________________

2. Las primeras 12 camisetas las van a pagar entre dos socios en partes iguales.
   a) ¿Cuánto tiene que aportar cada persona? ________________
   b) Si las pagaran entre tres personas, ¿cuánto aportaría cada una? ________
   c) ¿Y si las pagaran entre cuatro personas? ________________
   d) ¿Esta situación representa una relación de proporcionalidad directa? Explica por qué.

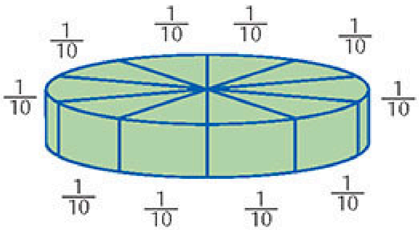
   ____

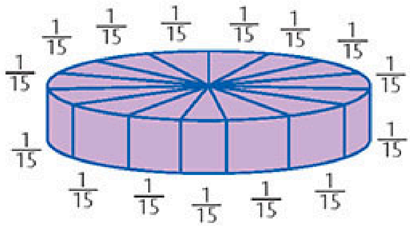
3. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Discutan las diferencias entre las dos situaciones planteadas y escriban sus acuerdos en su cuaderno.

Entre más personas, menos pastel

En pareja, analicen la siguiente situación. Después, resuelvan lo que se indica.

1. Un mesero atiende una fiesta particular y tiene que cortar el pastel en rebanadas de cantidad equivalente intentando que sea de la misma forma, de acuerdo con el número de asistentes. Por ejemplo, si hay diez invitados cada uno podrá comer $\frac{1}{10}$ del pastel; si son 15 invitados, entonces, cada rebanada será de $\frac{1}{15}$ de pastel, como se representa en el siguiente dibujo.





a) Describan cómo se obtiene la porción de pastel de acuerdo con el número de asistentes.

____

b) La siguiente tabla muestra el tamaño de la porción de pastel que les corresponderá de acuerdo con el número de asistentes. Completen la tabla.

Personas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Tamaño de la porción	1	$\frac{1}{2}$													
Personas × porción	1														

c) Hay una relación entre la cantidad de personas y la porción de pastel que les toca. ¿Qué sucede con el tamaño de la porción si aumenta el número de asistentes?

____

d) Si disminuye el tamaño de la porción de pastel, ¿qué indica esto respecto al número de asistentes? ____

e) ¿Qué sucede si se multiplica el número de asistentes por el tamaño de la porción?

____

2. Comparen sus respuestas con las de más parejas. Discutan sobre la relación que existe entre el tamaño de las porciones de pastel y el número de asistentes a la fiesta, sus diferencias con una relación de proporcionalidad directa y si observan alguna regularidad en la misma. Escriban sus acuerdos.

____

Diferentes tipos de variación

Lee la información. Después, resuelve los problemas.

1. Un automóvil de servicio de taxi cobra los viajes que realiza de acuerdo con el número de kilómetros que recorre.
   a) La siguiente tabla muestra el costo del viaje de acuerdo con el número de kilómetros recorridos. Completa la tabla.

Distancia (km)	7	12	17	21	25	29	34
Costo ($)	49						

   b) ¿Qué operación realizaste para determinar el costo de un viaje?

   ____

   c) ¿Cómo puedes determinar los kilómetros recorridos si se paga una cierta cantidad por el viaje? ¿Qué operación debes realizar? ______________________________

2. Un ranchero recibe cierta cantidad de alfalfa para alimentar a sus 30 vacas durante 16 días y cada día les da de comer la misma porción. Pero al rancho llegarán más vacas y él necesita saber el número de días que durará el alimento para un número distinto de vacas.
   a) Supón que el ranchero tiene 15 vacas y no 30, ¿cuántos días durará el alimento? ¿Por qué?

   ____

   b) La tabla muestra los días que durará el alimento de acuerdo con el número de vacas, considerando que les da la misma porción a todas cada día. Completa la tabla.

Número de vacas	30	40	60	80	120	240	480
Días que dura el alimento	16						

   c) Si multiplicas el número de vacas por los días que dura el alimento, ¿qué resultado obtienes, en cada caso? ______________________________
   d) ¿Qué operaciones debes realizar para determinar el número de días que durará el alimento para cierto número de vacas? ______________________________
   e) ¿Cómo determinarías el número de vacas que consumirán el alimento en cierto número de días? ______________________________

3. Comenta con un compañero las diferencias entre los dos problemas y las operaciones que realizaron en cada caso para responder las preguntas.

____

También hay proporcionalidad

En equipo, analicen la información. Después, resuelvan los problemas.

En los problemas de proporcionalidad hay que relacionar dos cantidades que modifican su valor, a las cuales se les denomina **variables**. Por ejemplo, el lado de un cuadrado y su perímetro son variables, porque de acuerdo con el valor del lado podemos determinar el perímetro.

1. Completen la tabla que muestra la relación entre el lado de un cuadrado y su perímetro.

Lado (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
Perímetro (cm)		8						

El número que se multiplica por la medida del lado para obtener el perímetro se llama **constante** de proporcionalidad, en este caso es 4.

2. Completen la siguiente tabla, a partir de los datos correspondientes en la tabla anterior, para validar que se cumple la constante.

$\frac{\text{Perímetro}}{\text{Lado}}$	4							
$\frac{\text{Lado}}{\text{Perímetro}}$		0.25						

Glosario

Variable. Es una cantidad que no tiene un valor fijo.

Constante. Es una cantidad que tiene un valor fijo.

Cuando se obtienen resultados como los anteriores al relacionar dos variables, se dice que están en **proporción directa** o que tienen una relación de **proporcionalidad directa**.

a) Si la longitud del lado aumenta, ¿qué sucede con el perímetro? ____________________

b) Si el perímetro aumenta, ¿qué sucede con la longitud de los lados? ________________

3. Sin embargo, hay situaciones en las que las variables se relacionan de otro modo. Analicen el siguiente problema.

Juan paga una renta de $8 200.00 por una casa con varias habitaciones. Él está considerando compartir la casa con otras personas para cubrir el costo de la renta, ya que así la puede dividir en partes iguales entre las personas que ocupen la casa.

a) Completen la siguiente tabla para determinar lo que le corresponde pagar a cada persona, si fuera ese el número de los que habitan la casa.

Número de personas	1	2	3	4	5	6	7	8
Pago por persona ($/personas)	8 200							

b) ¿Hay una relación de proporcionalidad directa entre las variables anteriores? ¿Por qué?

____

c) Si multiplican el número de habitantes por la renta que paga cada uno, ¿qué resultado obtienen en todos los casos? _______________

d) Si fueran 10 personas las que viven en la casa, ¿cómo pueden saber lo que pagaría cada una? _______________

e) Supón que en la casa vive un número x de personas y que cada una paga $512.50 de renta. ¿Cómo pueden saber cuántas personas habitan la casa?

____

Cuando en una relación entre dos variables una aumenta y la otra disminuye, guardando una proporción, se dice que una está en **proporción inversa** con la otra o que tienen una relación de **proporcionalidad inversa**.

4. Comenten qué diferencia hay entre una relación de proporcionalidad directa y una de proporcionalidad inversa. Escriban sus acuerdos con ayuda de su profesor.

____

____

APRENDEMOS

Cuando la variación que existe entre dos cantidades x y y es directa, la expresión algebraica correspondiente es $y = kx$, donde k es una constante de proporcionalidad.

Por el contrario, cuando la expresión algebraica es $y = \frac{k}{x}$, donde k es la constante de proporcionalidad, se dice que hay una variación proporcional inversa, esto es, al aumentar una de las cantidades, la otra disminuye en la misma proporción que aumenta la primera. Si la primera aumenta al doble, la segunda disminuye a la mitad; si la primera aumenta al triple, la segunda disminuye a la tercera parte, etcétera.

Por ejemplo, un trabajador puede realizar cierta labor en aproximadamente 30 días. Si el número de trabajadores aumenta al doble, es decir, a dos, entonces tardarían 15 días. Digamos que los trabajadores fueran cinco, entonces, el trabajo tardaría la quinta parte en realizarse, o sea, 6 días.

En todas las relaciones de proporcionalidad inversa se cumple que $k = xy$.

Trabajadores	1	2	3	5	10
Días	30	15	10	6	3
Producto	$1 \times 30 = 30$	$2 \times 15 = 30$	$3 \times 10 = 30$	$5 \times 6 = 30$	$10 \times 3 = 30$

TAREA

Resuelve los siguientes problemas.

1. Un automóvil viajó de la CDMX a la ciudad de Querétaro en tres horas y cuarto a una velocidad promedio de 100 km/h.
   a) ¿Cuánto tardará un autobús en recorrer la misma distancia a velocidad promedio de 90 km/h? Argumenta tu respuesta. ______________________

   ____

   b) ¿Qué expresión representa el tiempo del recorrido de acuerdo con la velocidad promedio de un automóvil? ______________________
2. Imagina que con una bolsa de semillas de 5 kg de cierta fruta, se puede producir en un año 3.5 toneladas de fruta. Si se consiguen más bolsas de semillas, se pueden considerar otras cantidades de fruta por año.
   a) ¿Qué relación de proporcionalidad hay entre estas variables: bolsas de semillas y toneladas de fruta? Argumenta tu respuesta.

   ____

   ____
3. En una ferretería venden bombas de extracción de agua. Una característica importante de éstas es la dimensión de las mangueras y el tiempo que se demoran en vaciar un estanque. Cada bomba tiene una velocidad constante de salida del agua y, cuando se varía el diámetro de la manguera, si el diámetro de la manguera es mayor, mayor es la cantidad de agua que extrae. Completa los datos de la siguiente tabla.

Diámetro de la manguera (in)	Tiempo que tarda en vaciar un tanque de 200 L (min)
0.5	60
1	
	10

APRENDE DE LOS ERRORES

Reflexiona las siguientes situaciones. Después, coméntalas con un compañero.

1. Si un compañero te dice que hay una relación de proporcionalidad directa entre el lado del cuadrado y su área, porque si la longitud del lado se incrementa, también lo hace el valor del área, ¿qué le dirías?
2. Si un compañero te dice que hay una relación de proporcionalidad directa entre el lado del cuadrado y su volumen, porque si la longitud del lado se incrementa, también lo hace el valor del volumen, ¿qué le dirías?

CONCLUIMOS

Crea y evalúate

Resuelve los problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Las dos situaciones que se plantearon al inicio de la lección presentaban relaciones de proporcionalidad directa e inversa, respectivamente. En la primera actividad, el costo de las camisetas era de $350.00.
   a) ¿Cómo se determina el costo de las camisetas según el número que se compra?
   ____
   b) Si se requieren 5 camisetas, ¿cuánto habrá que pagar? ______________
   c) ¿Qué tipo de relación representa la situación? ______________

Asimismo, el costo de las camisetas se dividió en partes iguales entre los socios del evento.

   d) ¿Qué sucede con la cantidad que tiene que aportar cada socio cuando aumenta el número de personas que van a pagar? ______________
   e) Dos personas pagaron cierto número de camisetas y cada una aportó $6 300.00. Si fueran tres personas las que se dividieran el costo de las camisetas, ¿cuánto tiene que pagar cada una? ______________
   f) ¿Qué tipo de relación representa la situación? ______________

Tic

Ingresa a www.ematematicas.net/porcentajes.php?a=1&p=&d=&tp=3, para obtener más información sobre proporcionalidad inversa y resuelve los problemas.

2. En los bancos, supermercados, etc., se junta gran cantidad de monedas; como los cajeros pierden mucho tiempo contándolas, en general, se hacen bolsas de monedas y éstas se pesan. Considera los siguientes datos.

Bolsas de dinero	Masa de las bolsas (g)	Valor monetario ($)
1	550	11 000
2	850	17 000
3	1 250	25 000
4	1 300	26 000
5	1 850	37 000

   a) ¿Existe proporcionalidad entre el número de bolsas y su masa? ¿Por qué? ______________
   ____
   b) ¿Existe proporcionalidad entre la masa de las bolsas y valor monetario de ellas? Argumenta tu respuesta. ______________
   ____

3. Las relaciones de proporcionalidad se encuentran en muchas situaciones, como el valor de los rayos UV en distintas horas del día, el estiramiento de un resorte de acuerdo con la fuerza que se aplica en él, entre otras.

En las siguientes situaciones determina si son relaciones de proporcionalidad directa o inversa y explica cómo se obtiene una cantidad dada la otra.

a) Una agencia de viajes organiza un paseo para gente de la tercera edad. El costo de la renta del autobús y el pago del chofer se dividirá entre la cantidad de personas que aborden el autobús.

Si suben 32 personas cada una pagaría $1 400.00; si viajan 25, 30 o 40 personas, ¿cuánto pagaría cada persona si todos aportan la misma cantidad? ____________________

b) Una máquina envasa 1 200 botellas con refresco en una jornada de ocho horas de trabajo, ¿cuántas botellas envasará en una jornada de 6, 10 y 12 horas de trabajo?

____

c) En una fiesta se sirvieron tacos al pastor en platos con cuatro piezas, ¿cuántos tacos se sirvieron en 10, 15, 25 y 50 platos? ____________________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Realiza una tabla de proporcionalidad directa y una de proporcionalidad inversa en una hoja de cálculo electrónico. Es importante que compruebes tus respuestas con este tipo de recursos.

2. Abre un archivo y realice lo que se pide.
   a) Para representar una relación de proporcionalidad directa, en la columna A, a partir de la celda A1 ingresa valores consecutivos hacia abajo, hasta el valor que prefieras.
   b) En la celda B1, que tendrá relación con el primer valor de la Columna A ubicado en la celda A1, escribe la fórmula: =A1*k, donde k representa la constante de proporcionalidad que quieras asignar.
   c) Selecciona la celda B1 y arrastra el cursor hacia abajo, hasta completar las celdas de la columna B correspondientes a las de la columna A.

3. A partir de lo anterior, ¿cómo podrías representar una relación de proporcionalidad inversa en una hoja de cálculo electrónica? ¿Cómo imaginas que sea su gráfica?
   a) ¿Qué valores anotarías en la columna A? ____________________
   b) ¿Qué fórmula usarías, a partir de la constante? ____________________
   c) Trabaja en la hoja electrónica para representar una relación de proporcionalidad inversa.

4. Comparte tu trabajo y experiencia con otros compañeros.

Eje: Número, álgebra y variación • **Tema:** Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes • **Aprendizaje esperado:** Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

L5 Literales, figuras y sucesiones

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Literales y figuras

Lee la información. Después, resuelve lo que se pide.

1. Observa la siguiente sucesión de figuras y escribe el número de cuadrados que forman cada una.

Figura 1

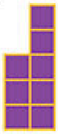


Figura 2

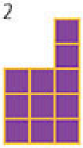


Figura 3

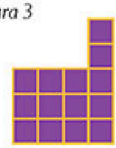
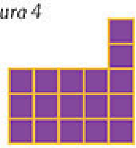


Figura 4



________ ________ ________ ________

a) Determina una regla algebraica que indique cuántos cuadrados tendrá cualquier término de la sucesión: ________________________________

b) ¿Podrías representar de otra forma la misma regla? Argumenta tu postura. ________

____

2. Considera la siguiente sucesión de figuras y anota el número de cuadrados de cada una.

Figura 1

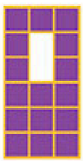


Figura 2

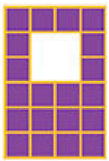


Figura 3

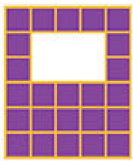
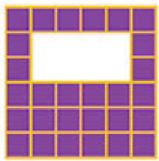


Figura 4



________ ________ ________ ________

a) Escribe una fórmula algebraica para calcular el número de cuadrados de cualquier figura de la sucesión: ________________________________

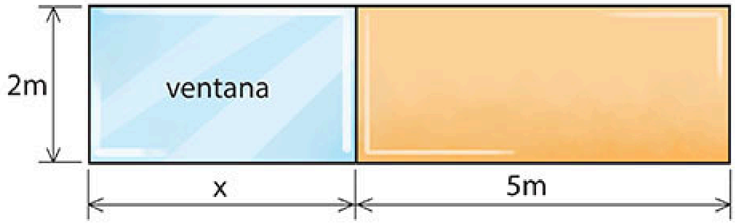
3. Compara tus expresiones algebraicas con las de otro compañero. Juntos encuentren otra expresión algebraica que permita encontrar el número de cuadrados de cualquier figura de las sucesiones anteriores.

____

Literales en áreas

En pareja, lean la situación. Después, resuelvan lo que se pide.

1. En una pared de una casa piensan construir un ventanal que permita ver hacia el jardín. El ventanal será rectangular, de 2 m de alto, pero aún no se sabe cuál será su largo; sin embargo, el resto de la pared mide 5 m, como se muestra en la siguiente ilustración.



   a) ¿Cuál es el área de la pared que no ocupa la ventana? ____________

   b) ¿Cómo se podría expresar el área que cubrirá la ventana? ____________

   c) Describan cómo calcular el área de toda la pared. ____________

   ____

   d) ¿De qué manera se puede expresar la medida del área de toda la pared? ____________

   ____

   e) Escriban de otras maneras las expresiones que representan el área de toda la pared.

   ____

2. Consideren que se van a construir dos paredes iguales a la anterior, luego tres, luego cuatro, todas iguales, y escriban la expresión algebraica para cada caso, de dos maneras diferentes.

   a) Dos paredes: ____________

   b) Tres paredes: ____________

   c) Cuatro paredes: ____________

3. Escriban de dos maneras diferentes una fórmula para obtener el área de cualquier cantidad de paredes con las mismas medidas, es decir, para un número de paredes n.

   ____

4. Comparen sus expresiones con las de otra pareja. Si existen diferencias, validen que todas son equivalentes.

Figuras compuestas

Lee la información. Después, resuelve las actividades.

1. Considera las siguientes figuras y escribe dos expresiones diferentes que representen el área de cada una.

Figura 1

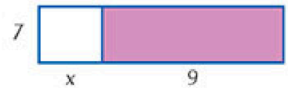
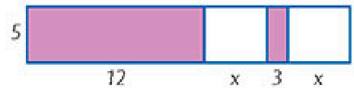


Figura 2



______________________ ______________________

2. Ahora, escribe de dos maneras distintas una fórmula para determinar el área de cualquier figura con las mismas medidas que las anteriores.

   a) Figura 1: ______________________

   b) Figura 2: ______________________

3. Considera las medidas del siguiente cuadrado y rectángulo, con ellos se construyeron las figuras de la tabla. Escribe de dos maneras diferentes el área de cada figura.

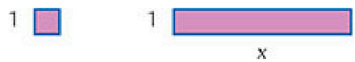
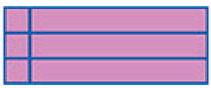
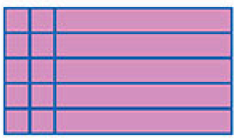
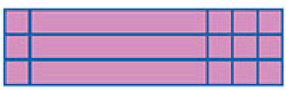


Figura	Expresión 1	Expresión 2
		
		
		

4. Valida tus expresiones con las de otro compañero. Juntos determinen un procedimiento que permita comprobar que sus expresiones son equivalentes. Después, escríbanlo en el siguiente espacio.

____

APRENDE DE LOS ERRORES

Reflexiona las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un amigo te dice que la regla para la sucesión de números pares: $2n$ es igual a $2 + n$, por tanto, los números pares son 2, 4, 5, 6, ... ¿Qué le dirías?

2. Explica por qué las siguientes igualdades no son correctas.

$$3(x + 5) = 3x + 8$$
$$3(x + 5) = 3x + 35$$
$$3(x + 5) = 3 + x + 15$$

APRENDEMOS

Como has visto antes, una **expresión algebraica** es una representación que combina letras y números que están ligados por las operaciones matemáticas.

Las expresiones equivalentes son un conjunto de términos que permiten representar de formas diferentes una misma expresión algebraica, por ejemplo, la expresión algebraica $3x + 9$ es equivalente a $3(x + 3)$.

La regla de una sucesión puede escribirse de diferentes formas, usando expresiones equivalentes. Por ejemplo, en la sucesión: 1, 9, 17, 25, 33,... la regla puede escribirse como: $8n - 7 = 8(n - 1) + 1$.

Una manera de comprobar que dos expresiones son equivalentes es asignarle un valor numérico a las literales, resolver las expresiones y comprobar que los resultados sean iguales. Para el caso anterior, consideremos que $x = 2$, por tanto:

$3x + 9 = 3(2) + 9 = 15$, y en el segundo caso:

$3(x + 3) = 3(2 + 3) = 3 \times 5 = 15$.

Lo que significa que las expresiones son equivalentes.

Analiza las expresiones que representan reglas de sucesiones. Después, resuelve lo que se pide.

1. Verifica si las siguientes expresiones son o no equivalentes. Asigna a cada literal 10 valores diferentes y corrobora si ambas expresiones dan los mismos resultados, esto indicaría que son equivalentes.

   a) $3x + 3$ y $3(x + 3)$ ____________________

   b) $7(2x - 3)$ y $14x - 21$ ____________________

   c) $6 + 2x - 3$ y $2x + 3$ ____________________

   d) $8x + 3$ y $8(x + 3)$ ____________________

2. Valida tus respuestas con las de otro compañero. Si existen diferencias, lleguen a acuerdos con el apoyo del profesor.

TAREA

Lee la información. Después, resuelve los ejercicios.

1. Escribe la regla o expresión algebraica de las siguientes sucesiones de dos maneras diferentes. Verifica si las expresiones que formulaste corresponden con la sucesión, en cada caso.

   a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, … Expresión algebraica: ______________________

   b) 3, 7, 11, 15, 19, … Expresión algebraica: ______________________

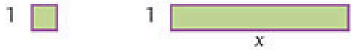
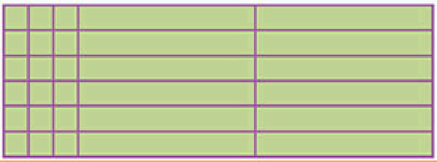


Figura	Expresión 1	Expresión 2
		
		
		

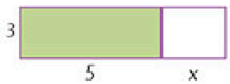
2. Encuentra dos formas de expresar las siguientes configuraciones. Considera que:

CONCLUIMOS — Crea y evalúate

Resuelve los problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Retoma la información de la actividad al inicio de esta lección.

Considera que el área total de la pared es igual al área de los dos rectángulos sumados, o bien puede considerarse un solo rectángulo. Observa las medidas de la siguiente figura.



a) Escribe el área de la figura como si fuera un solo rectángulo. ______________________

b) Considera el área como dos rectángulos y escribe la expresión correspondiente.

____

c) Escribe la expresión anterior de una forma diferente. ______________________

d) ¿Las expresiones son equivalentes? Argumenta tu respuesta. ______________________

____

2. Analiza las expresiones algebraicas de la tabla y responde.

a) Cuáles de las expresiones son equivalentes? ______________________

b) ¿Cómo podrías demostrarlo? ______________________

3. Completa la siguiente tabla, asignando los valores que se indican a la literal x.

	Valores de x								
Expresiones	1	3	5	8	11	14	21	25	30
$3(x+7)$									
$3x+21$									
$5(x+9)$									
$3x+2x+45$									
$5x+45$									

a) ¿Cuáles de las expresiones anteriores son equivalentes? ______________________

b) ¿Coinciden con las respuestas que obtuviste antes? ______________________

c) ¿La expresión $10(x+19)$ es equivalente a $10x+19$? ¿Por qué?

____

4. Escribe de dos manera diferentes una fórmula para obtener números de las siguientes sucesiones y verifica si las sucesiones corresponden a las expresiones que formulaste.

a) 3, 6, 9, 12, … ______________________

b) 7, 19, 31, 43, … ______________________

5. Determina si las siguientes expresiones son equivalentes.

a) $5(x+12)$ y $5(x+6+6)$ ______________________

b) $3x+5+4x+7-x$ y $6(x+2)$ ______________________

Tic

En la página https://technology.cpm.org/general/tiles/, puedes formar algunas figuras como las que hemos trabajado y descubrir formas de expresarlas con números y literales con diferentes expresiones algebraicas.

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

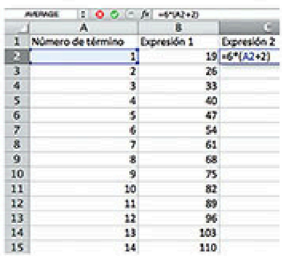
1. Usa una hoja de cálculo electrónica y representa de dos maneras diferentes la regla de una sucesión. Después, valida que son equivalentes.

a) Primero, en la columna A, a partir de A2, anota los números del 1 al 30 en las filas correspondientes. Estos valores representarán los primeros términos de una sucesión.

b) Después, en la celda B2, escribe la primera expresión de la actividad 5, inciso b, de esta página, sustituyendo x por A2 (que es la celda que corresponde al primer término), es decir, 3*A2+5+4*A2+7−A1; luego, da *enter*, selecciona la celda B2 y arrastra el cursor hacia abajo para generar la sucesión.

c) Finalmente, en la celda C2, escribe la otra expresión algebraica de la siguiente forma: 6*(A2+2), da *enter*, selecciona la celda C2 y arrastra el cursor hacia abajo para generar la sucesión.

- ¿Obtuviste la misma sucesión en ambos casos? ______________________



	A	B	C
1	Número de término	Expresión 1	Expresión 2
2	1	19	=6*(A2+2)
3	2	26	
4	3	33	
5	4	40	
6	5	47	
7	6	54	
8	7	61	
9	8	68	
10	9	75	
11	10	82	
12	11	89	
13	12	96	
14	13	103	
15	14	110	

2. Prueba con otras expresiones equivalentes de la lección y valida que en todas obtienes la misma sucesión. Compara tu trabajo con el de otros compañeros.

Eje: Forma, espacio y medida • Tema: Figuras y cuerpos geométricos • Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

L6 Polígonos regulares

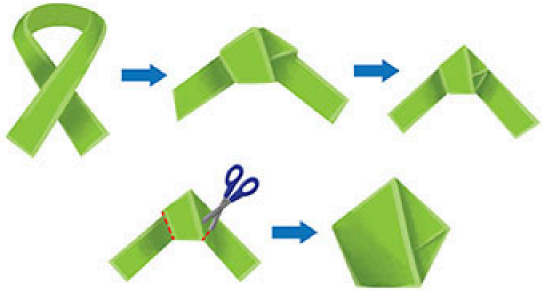
COMENZAMOS

Reflexiona y discute

Polígonos mediante doblado de papel

Lee la siguiente situación. Después, resuelve lo que se pide.

1. En la clase de Artes Plásticas, Juan y Pedro están haciendo figuras de papel mediante dobleces con los que decorarán su salón. Ellos notaron que al hacer un nudo en una tira de papel se obtiene un polígono, como el que se muestra a continuación.



a) ¿Qué polígono se forma? __________

b) Si el ancho de la tira es de 3 cm, ¿cuánto mide el perímetro del polígono? Explica tu respuesta. __________

c) Mide los ángulos que se forman sobre los lados del polígono, ¿cuánto miden? __________

d) ¿Cuánto suman todos los ángulos? __________

2. Construye otro polígono igual al anterior, pero con una tira de papel más ancha. Considera que el largo de la tira debe ser ocho veces mayor que el ancho, para que puedas manipularla correctamente.

a) ¿Cuál es el perímetro de tu polígono? __________

b) ¿Cuánto suman los **ángulos interiores** de tu figura? __________

3. Comparte y compara tus respuestas con las de otro compañero. Discutan las siguientes preguntas: ¿cambió la medida de los ángulos? ¿Podrían establecer la medida de los ángulos interiores de un polígono sin trazarlo? Escriban sus acuerdos en el siguiente espacio.

____

____

Glosario

Ángulo interior. Está dentro de un polígono y está formado por dos lados que comparten un vértice común.

Aprende y aplica

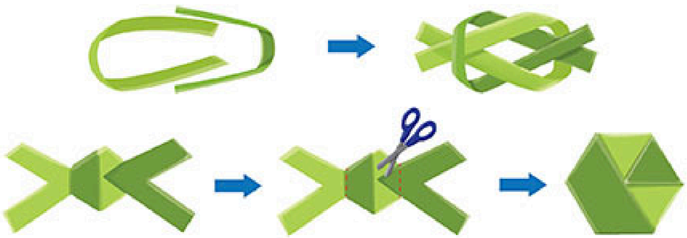
SIGAMOS ADELANTE

Más figuras con tiras de papel

En parejas, lean la información. Después, realicen lo que se pide.

A continuación, se muestran los pasos para formar otro polígono, pero en esta ocasión con dos tiras de papel del mismo ancho y largo.

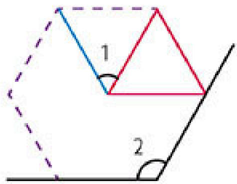
1. Consigan dos tiras de papel del mismo tamaño y construyan el polígono. Después, respondan las preguntas.



   a) ¿Qué polígono se obtiene? __________

   b) ¿Cuánto mide cada ángulo interior del polígono? __________

2. Como puedes ver, al hacer la figura con las dos tiras mediante dobleces, se forma un triángulo desde el centro de la figura, como se muestra en la imagen de la derecha.



   a) ¿Qué tipo de triángulo se forma? __________

   b) ¿Cuánto mide el ángulo señalado en la imagen con el número 1? __________

   c) ¿Podrían determinar la medida sin medirla? ¿Cómo? __________

   d) ¿Cuánto mide el ángulo 2? __________

   e) ¿Cuántos triángulos como el rojo caben en el polígono? __________

   f) ¿Cuánto suman los ángulos que coinciden en el centro del polígono? __________

   g) El polígono que se formó al hacer el nudo con la tira de papel al principio de la lección también puede cubrirse con triángulos. ¿Cuánto miden los **ángulos centrales** del polígono, que se forman con los triángulos? __________

3. Comparen sus respuestas con las de otra pareja y redacten una conclusión sobre la relación entre los ángulos centrales de los polígonos y su número de lados.

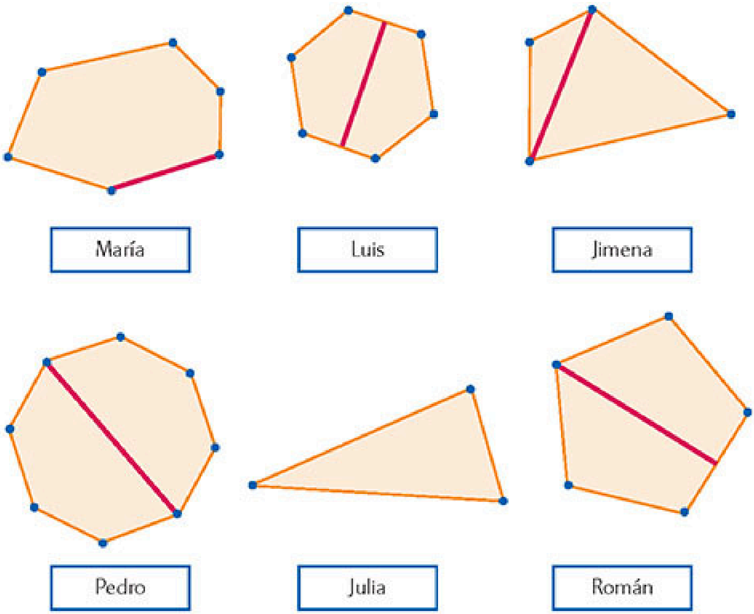
Glosario

Ángulo central. Se forma con dos segmentos que unen el centro del *polígono* con dos de sus vértices.

Diagonales de polígonos

En equipo, lean la siguiente situación. Después, resuelvan lo que se pide.

El profesor Juan pidió a sus alumnos que trazaran en los siguientes polígonos un segmento en color rojo desde un vértice hasta otro vértice que no fuera consecutivo. Algunos estudiantes realizaron los siguientes trazos.



1. Indiquen si los estudiantes realizaron correcta o incorrectamente lo solicitado y justifiquen su respuesta en cada caso.

   a) María: ____________________

   b) Luis: ____________________

   c) Jimena: ____________________

   d) Pedro: ____________________

   e) Julia: ____________________

   f) Román: ____________________

   ____

2. Una vez que establecieron aquellos segmentos que son **diagonales** de los polígonos, contesten las siguientes preguntas y realicen lo que se pide.

a) ¿Por qué en el caso de Julia no es posible realizar el trazo que solicitó el profesor Juan?

____

b) ¿Un polígono podría tener más de una diagonal? _______________

- Tracen en el siguiente recuadro un ejemplo que justifique su respuesta.

c) ¿Desde un solo vértice de un polígono es posible trazar más de una diagonal? ________

- Tracen un ejemplo que demuestre su respuesta en el siguiente recuadro.

d) ¿Existe algún tipo de **polígono regular** o **irregular** en el que no sea posible trazar ninguna diagonal desde cualquiera de sus vértices?

____

- Tracen un ejemplo.

3. Compartan con otros equipos sus respuestas; después, con ayuda de su profesor valídenlas en consenso. Comenten sobre la relación que existe entre un polígono y el número de diagonales que pueden trazarse desde un mismo vértice. Registren sus acuerdos en el siguiente espacio.

____

____

Glosario

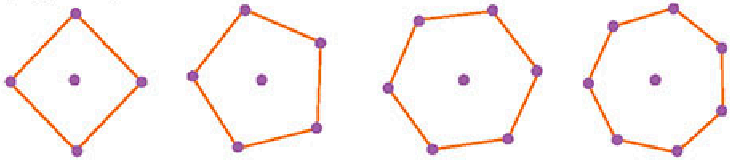
Diagonal. Todo segmento que une dos vértices no consecutivos de un polígono.

Polígono regular. Todos sus lados y ángulos miden lo mismo.

Polígono irregular. No todos sus lados miden lo mismo.

En equipo, analicen la siguiente situación. Después, resuelvan lo que se pide.

1. Tracen desde un mismo vértice todas las diagonales posibles en cada uno de los siguientes polígonos regulares.



   a) ¿Qué figuras se formaron dentro de cada polígono al trazar las diagonales? ______

   b) ¿Qué relación observan entre el número de diagonales que trazaron y el número de lados de cada figura?

   ______

   c) ¿Qué relación identifican entre el número de lados y el número de triángulos dentro de cada polígono?

   ______

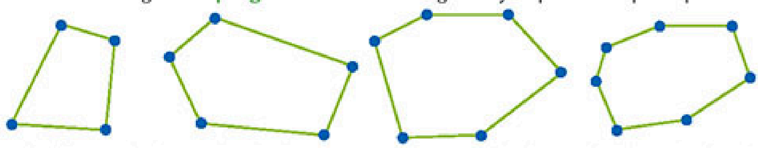
2. Completen la siguiente tabla, de acuerdo con las regularidades encontradas en la actividad anterior.

Polígono regular	Número de lados	Número de diagonales desde un mismo vértice	Número de triángulos que se forman
Triángulo			
Cuadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			

Glosario

Polígono convexo. Polígono cuyos ángulos interiores miden menos de 180°.

3. Analicen los siguientes **polígonos convexos** e irregulares y respondan lo que se pide.



   a) Al trazar las diagonales desde un mismo vértice, ¿cambia la cantidad de triángulos al trabajar con polígonos irregulares convexos? ¿Por qué?

   ______

   b) Si trazan un polígono convexo de *n* lados, ¿cuántas diagonales se pueden trazar desde un mismo vértice?

   ______

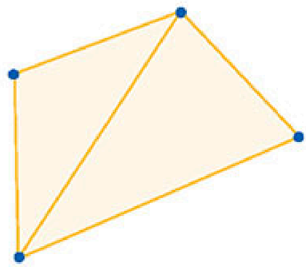
4. Escriban una expresión que indique la cantidad de triángulos que podrían formarse al trazar las diagonales de un polígono de *n* lados desde un vértice. ______

Ángulos de polígonos regulares

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Consideren el siguiente cuadrilátero, al que se le trazaron todas las diagonales posibles desde uno de sus vértices.
   a) ¿Cuántos triángulos se forman? ______
   b) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada uno de los triángulos?

   ______

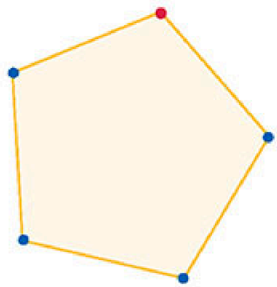
   c) A partir de lo anterior, ¿cuánto suman los ángulos interiores del cuadrilátero? ¿Por qué?

   ______

   d) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cualquier otro cuadrilátero? ¿Por qué?

   ______

2. Ahora, analicemos el caso de un pentágono regular, tracen todas las diagonales posibles desde el vértice color rojo.

   a) ¿Cuántos diagonales se pueden trazar desde el vértice rojo? ______
   b) ¿Cuántos triángulos se formaron? ______
   c) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de cada triángulo? ______
   d) ¿Cuánto suman los ángulos interiores del pentágono? Justifiquen su respuesta.

   ______

   e) En el caso del hexágono, ¿cuántos triángulos se pueden formar al trazar las diagonales desde un vértice?

   ______

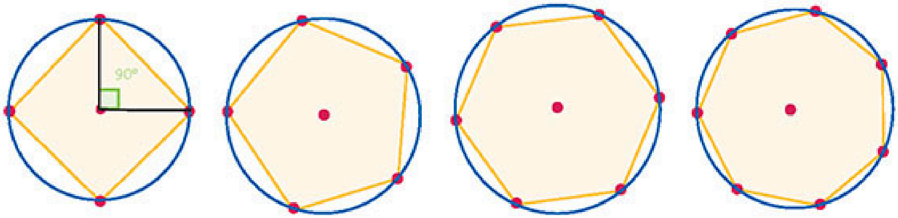
   f) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de todos los triángulos? ______
   g) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un octágono? ¿Cómo lo determinaron?

   ______

3. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Discutan sobre cómo determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono y, en el caso de los polígonos regulares, cómo determinar la medida de cada uno sin trazarlos. Escriban sus acuerdos en el siguiente espacio.

   ______

4. Observen los siguientes polígonos regulares y realicen lo que se indica en cada caso.



Las figuras representan polígonos regulares inscritos en una circunferencia, es decir, todos sus vértices están sobre la circunferencia. En el caso del cuadrado se trazó un ángulo central.

a) ¿Cuántos ángulos centrales más se pueden trazar en el cuadrado? ________________

b) ¿Cuánto miden cada uno de ellos? ________________________________

c) ¿Cuánto suman los ángulos que se formaron en el centro del cuadrado? __________

d) En el caso del pentágono, ¿cuántos ángulos centrales se pueden trazar sobre los vértices consecutivos? ________________________________

e) Completa las siguientes expresiones referentes al pentágono regular.

Medida de un ángulo central: ______ Suma de todos los ángulos centrales: _______

5. Realicen el mismo procedimiento con el hexágono y el heptágono.

a) Hexágono. Número de ángulos centrales: ________________________

Medida de un ángulo central: ______ Suma de todos los ángulos centrales: _______

b) Heptágono. Número de ángulos centrales: ________________________

Medida de un ángulo central: ______ Suma de todos los ángulos centrales: _______

c) ¿Cómo pueden determinar la medida de un ángulo central de un polígono de 12 lados?

____

d) ¿Cuánto mide cada ángulo central de un polígono regular de 12 lados? __________

e) ¿Cuánto suman los ángulos centrales de un polígono regular de *n* lados? __________

f) Escriban una expresión para determinar la medida de cada ángulo central de un polígono regular de *n* lados: ________________________

6. Completen la siguiente tabla a partir de sus respuestas en las actividades previas.

Polígono regular	Medida de un ángulo central (°)	Suma de los ángulos interiores (°)	Medida de cada ángulo interior (°)
Triángulo equilátero			
Cuadrado			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			
Nonágono			
Decágono			

a) ¿Pueden utilizar la suma de los ángulos interiores de un triángulo para determinar el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono de *n* lados? Expliquen.

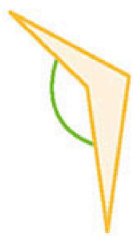
b) Escriban una expresión que permita calcular la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono de *n* lados.

c) Con base en lo anterior escriban una expresión que permita calcular la medida de un ángulo interior de cualquier polígono regular de *n* lados:

7. Comparen sus expresiones con las de otra pareja y valídenlas con ayuda de su profesor. En un polígono regular la suma de la medida de un ángulo central y la de un ángulo interior es igual a 180°. Expliquen por qué en el siguiente espacio.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente figura y responde. Después, comparte tu opinión con un compañero.

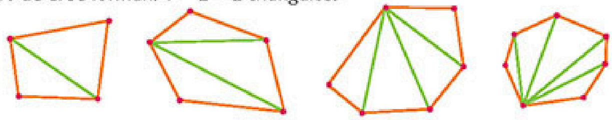


1. Si un compañero te dice que la figura es un cuadrilátero convexo, ¿qué le dirías?

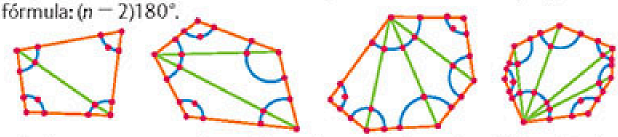
2. Si tu compañero te dice que la figura tiene señalado uno de sus cuatro ángulos internos, ¿estarías de acuerdo? ¿Por qué?

APRENDEMOS

En cualquier polígono convexo de n lados es posible trazar $n - 3$ diagonales desde un mismo vértice, éstas forman $n - 2$ triángulos, sin importar el vértice que se elija, como lo demuestran las siguientes figuras. Por ejemplo, un cuadrilátero tiene $4 - 3 = 1$ diagonal y dentro de él se forman: $4 - 2 = 2$ triángulos.



Como la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°, se puede usar este dato para determinar la suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados con la fórmula: $(n - 2)180°$.

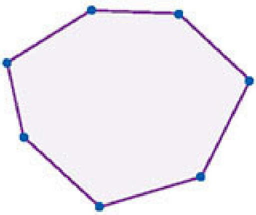


A partir de lo anterior, se puede establecer la medida de un **ángulo interior** de un polígono regular de n lados, mediante la fórmula: $\frac{(n-2)\,180°}{n}$.
Como una circunferencia forma un ángulo completo, es decir, de 360°, para determinar la medida de un **ángulo central**, se divide 360 entre el número de lados: $\frac{360}{n}$.

CONCLUIMOS — Crea y evalúate

Resuelve los problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Con base en lo que has analizado sobre el total de diagonales que pueden trazarse desde un vértice de un polígono contesta lo siguiente.



a) ¿Desde cualquier vértice de un mismo polígono se puede trazar el mismo número de diagonales?

_____________. Demuéstralo en el siguiente polígono.

b) ¿Cuál es el total de diagonales del polígono? _____________

c) ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde cada vértice? _____________

d) Si quisiéramos conocer el total de diagonales de un polígono, ¿sería suficiente multiplicar el número de diagonales desde un vértice por el total de vértices? ¿Por qué?

____

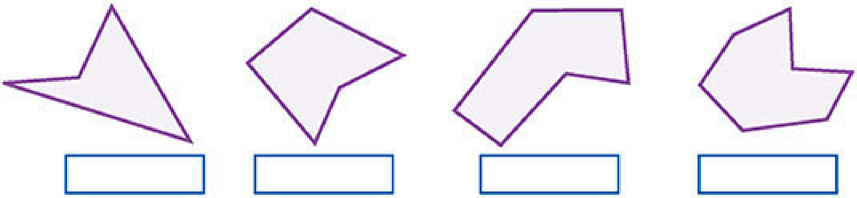
e) ¿Cómo podrías obtener el total de diagonales a partir de la operación anterior?

____

f) Valida si lo anterior funciona en un hexágono y en un pentágono; después, generaliza el total de diagonales de un polígono de n lados mediante una fórmula.

____

2. Considera los siguientes polígonos que no son convexos y anota debajo de cada uno la suma de sus ángulos internos.



a) ¿Es posible dividir cada figura en el número de triángulos que indica la fórmula? ______

b) ¿La suma de los ángulos interiores varía con respecto a la de los polígonos convexos? ¿Por qué?

____

3. Determina cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular a partir del número de lados que indica cada inciso.

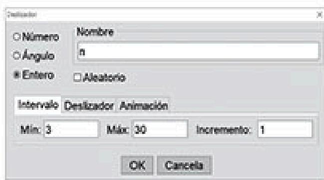
a) 8 lados: ______ **b)** 15 lados: ______ **c)** 20 lados: ______

4. Si la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo es la que se indica en cada inciso, determina el número de lados del polígono.

a) 1 260°: ______ **b)** 2 340°: ______ **c)** 4 320°: ______

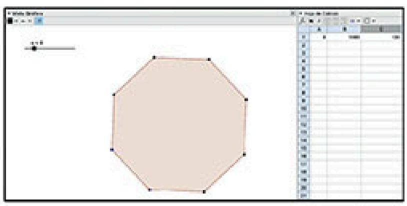
APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

Para verificar los resultados y expresiones que has desarrollado a lo largo de la lección trabaja en un archivo de Geogebra.



1. Abre un archivo y en la opción "Vistas" activa "Vista Gráfica" y "Hoja de Cálculo".

a) En la ventana a=2, elige deslizador y da clic sobre el archivo. Se abrirá una ventana como la siguiente, elige las opciones que se muestran y da clic en "OK". La literal *n* representará el número de lados de cualquier polígono regular.



b) Después, en la ventana Polígono regular, elige "Polígono regular". En la ventana "Vértices", anota la letra *n* y da clic en "OK".

c) Ahora, en la hoja de cálculo anota en la celda A1 la fórmula: = *n*; en la celda B2, =180*(*n* − 2), que representa la suma de los ángulos interiores del polígono; y en la celda C1, anota: = (180*(*n* − 2))/*n*, para obtener la medida de cada ángulo interior.

2. Mueve el deslizador y observa cómo se modifican los valores de la tabla.

a) Ahora, prueba las expresiones y compáralas con tus respuestas de la lección.

b) ¿Qué expresión anotarías en D1 para calcular la media del ángulo central?

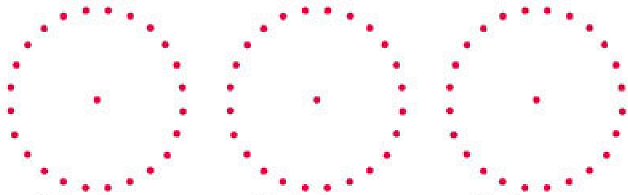
L7 Construcción de polígonos regulares

COMENZAMOS Reflexiona y discute

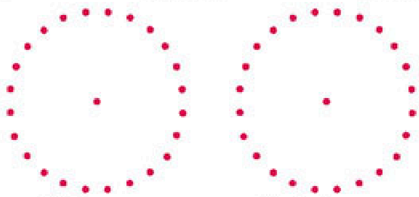
Polígonos sobre un geoplano

Lee la información. Después, realiza lo que se pide.

1. El profesor Jorge entregó a sus alumnos los siguientes geoplanos circulares y les pidió que trazaran el polígono regular inscrito que se indica. Ayúdalos a completar la tarea.



Triángulo Cuadrado Hexágono



Octágono Dodecágono

a) Describe el procedimiento que seguiste para construir los polígonos. ______________

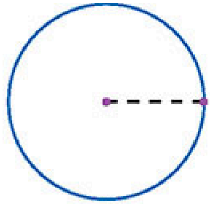
____

2. Divide los polígonos regulares en triángulos, donde un vértice esté sobre el centro del polígono y uno de sus lados sea un lado del polígono.
   a) Determina qué tipo de triángulos se forman en cada caso.
   b) Calcula la medida de los ángulos centrales e interiores de cada polígono, sin tomar las medidas.

Polígono / Ángulo	Triángulo	Cuadrado	Hexágono	Octágono	Dodecágono
Medida del ángulo central (°)					
Medida del ángulo interior (°)					

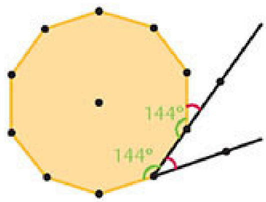
3. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Comenten sobre las estrategias que pueden seguir para trazar polígonos regulares a partir de la medida de sus ángulos centrales o interiores.

Trazo de polígonos



En pareja, realicen las siguientes actividades.

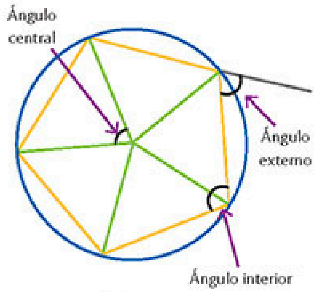
1. Se quiere trazar un octágono regular inscrito en una circunferencia a partir del centro y un punto sobre la circunferencia que corresponde a un vértice del polígono, como se muestra a continuación. Analicen la figura; después, resuelvan lo que se pide.
   a) ¿Cuántos ángulos se deben formar a partir del centro de la circunferencia para trazar el octágono regular? ¿Por qué? ______
   b) ¿Cuánto medirá cada ángulo central? Argumenten su respuesta. ______
   c) Construyan el octágono regular inscrito en la circunferencia anterior, a partir de sus ángulos centrales.
2. Tracen en su cuaderno un pentágono regular inscrito en la circunferencia.
   a) Describan lo que hicieron para construir el pentágono. ______
   b) ¿Podrían trazar cualquier polígono regular con esta información? ______
   c) Al construir polígonos regulares a partir de una circunferencia, ¿es posible establecer previamente la medida de cada lado del polígono? Expliquen. ______
   d) Si tienes un segmento de 5 cm, ¿cómo podrías trazar un octágono regular de tal forma que el segmento represente uno de sus lados? ______
   e) ¿Cómo podrías utilizar lo que conoces sobre ángulos interiores de polígonos para realizar el trazo? ______
3. Realicen el trazo en tu cuaderno y compáralo con el de otros compañeros.
4. El siguiente decágono se trazó a partir de los ángulos que se forman con la prolongación de sus lados.



   a) ¿Cuánto deben de sumar las medidas de cada ángulo interior y el ángulo que se forma con la prolongación de uno de los lados, los ángulos interiores verdes y sus respectivos ángulos rojos, señalados en la figura? ______
   b) ¿Cuánto mide cada ángulo rojo? Argumenten su respuesta a otro equipo. ______
   c) ¿Cuántos ángulos se pueden formar con la prolongación de los lados del decágono? Expliquen. ______
   d) En el caso de otros polígonos regulares, si construimos ángulos exteriores como el caso anterior, ¿cuánto deben sumar con sus respectivos ángulos interiores? ______

APRENDEMOS

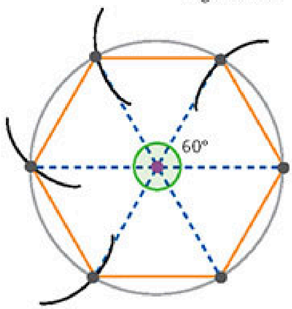
Hay varios elementos que nos permiten realizar la construcción de un polígono regular, por ejemplo, sus **ángulos centrales**, sus **ángulos interiores** o sus **ángulos externos**, que son ángulos entre un lado de una figura y la prolongación de otro lado adyacente al primero. Los ángulos externos son **suplementarios** de los ángulos interiores respectivos.



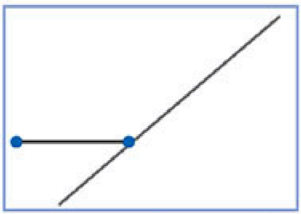
Glosario

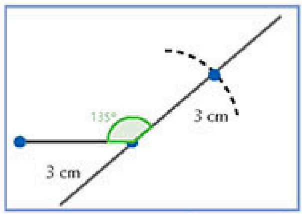
Ángulos suplementarios.
Son aparejas de ángulos que la suma de sus medidas es igual a 180°, pueden ser adyacentes, es decir, compartir el mismo vértice y uno de sus lados.

1. Para trazar un polígono regular a partir de la medida de sus ángulos centrales, puedes hacerlo si lo inscribes en una circunferencia.
   a) Se divide 360° entre el número de lados para determinar la medida de los ángulos centrales.
   b) Se trazan los ángulos y se unen los puntos donde los lados de los ángulos intersecan a la circunferencia para formar el polígono.
   c) Se puede trazar un ángulo central y trasladar la medida del arco de la circunferencia con el compás, como se muestra en la figura.

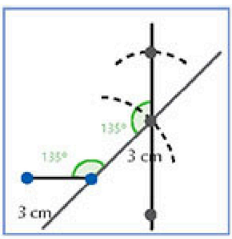


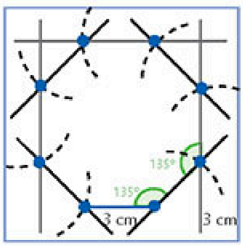
2. Para trazar un polígono regular, dada la medida de sus lados, podemos utilizar tanto el ángulo externo como el interno.
   Por ejemplo, para trazar un octágono regular cuyos lados miden 3 cm, podemos efectuar la siguiente secuencia de trazos.
   a) Se traza el lado de 3 cm y un ángulo interno, que en este caso mide 135°, y sobre la prolongación del lado del ángulo se traslada la medida de 3 cm con el compás, como muestran las siguientes imágenes.





   b) Después, se repite lo anterior sobre los lados que se construyen hasta completar el polígono.



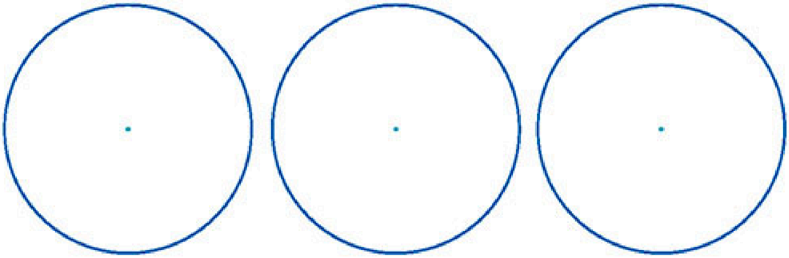


TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Traza el polígono regular inscrito que se pide en cada circunferencia y anota las medidas que se indican.

Polígono de 15 lados | Polígono de 10 lados | Polígono de 20 lados



Polígono de 15 lados	Polígono de 10 lados	Polígono de 20 lados
Ángulo central: ________	Ángulo central: ________	Ángulo central: ________
Ángulo interno: ________	Ángulo interno: ________	Ángulo interno: ________
Ángulo externo: ________	Ángulo externo: ________	Ángulo externo: ________

2. Traza los polígonos regulares, en el siguiente espacio.

a) Decágono de 2 cm por lado

b) Octágono de 2.5 cm por lado

3. Escribe los procedimientos que seguiste para trazar los polígonos.

____

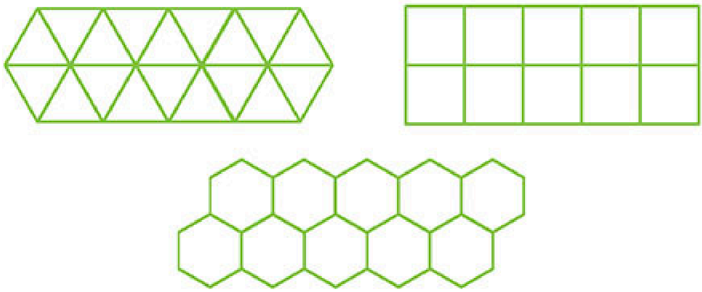
____

____

Polígonos que cubren el plano

En equipo, resuelvan las siguientes actividades.

1. Las siguientes imágenes representan mosaicos con forma de polígonos regulares con los que se recubrieron diferentes superficies. Analicen las construcciones y respondan las preguntas.



a) ¿Qué medida tiene cada ángulo interno de las figuras con las que se recubrieron las superficies? ______

b) ¿Cuántas figuras coinciden en un mismo vértice en cada caso? ______

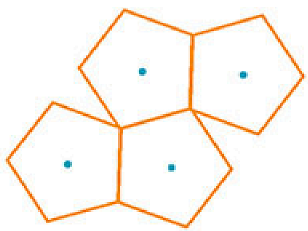
______

c) ¿Cuánto suman los ángulos que coinciden en un mismo vértice? ______

d) Escriban sus conclusiones sobre las características que tienen los polígonos que permiten cubrir la superficie sin dejar espacios entre ellas. ______

______

2. Analicen la siguiente construcción hecha con pentágonos regulares.



a) ¿Cuánto miden los ángulos internos de los pentágonos regulares? ______

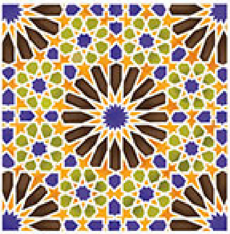
b) ¿Cuánto suman los ángulos que comparten un mismo vértice? ______

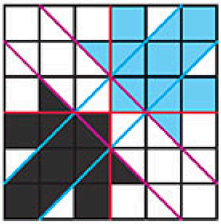
c) ¿Qué es lo que falla en este caso, es decir, por qué no se cubre todo el plano? ______

______

3. Compartan sus respuestas con las de otro equipo. Analicen qué sucede en los vértices de las piezas que conforman los mosaicos bien logrados y lo que sucede en el caso de las figuras con las que no se logra cubrir la superficie. Escriban sus conclusiones.

Sumar los ángulos internos de polígonos se usa frecuentemente en el diseño de estructuras complejas. También se usa para delimitar terrenos o hacer planos y para el diseño de obras de arte, como se muestra en las siguientes imágenes.





4. Elijan una de las figuras anteriores y redacten problemas relacionados con los temas vistos en la lección. Intercámbienlos con otro equipo para que los resuelvan.

5. Al terminar, comenten sus problemas con el profesor y el resto del grupo, y resuelvan las dificultades que tuvieron en el planteamiento o en la resolución de sus problemas.

APRENDE DE LOS ERRORES

Reflexiona las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

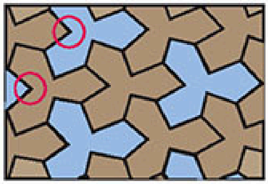
1. Si un compañero piensa que con cualquier polígono regular se puede cubrir un plano sin dejar huecos, ¿estarías de acuerdo? ¿Qué le dirías?

2. Si otro compañero dice que con dos figuras diferentes no es posible cubrir el plano sin dejar huecos y sin que se encimen, ¿qué le dirías para demostrar tu postura?

APRENDEMOS

Un teselado o teselación es una regularidad o patrón conformado por figuras geométricas con las que se recubre completamente una superficie plana, de tal modo que no queden huecos entre las figuras y tampoco se sobrepongan.

Además de coincidir en la longitud de los lados, es importante resaltar que en un teselado la suma de los ángulos de las figuras que coinciden en un mismo vértice es de 360°, es decir, la medida de cada ángulo de las figuras que coinciden en un vértice divide 360° de manera exacta.



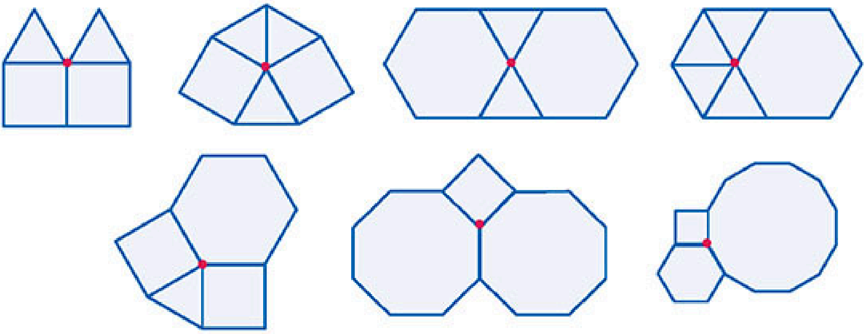
Tic

Ingresa a https://bit.ly/2Lv2XFY para conocer más acerca de los teselados que se pueden formar con polígonos regulares.

Teselados

En pareja, resuelvan lo que se pide.

1. Revisen los siguientes arreglos de figuras con los que se puede recubrir o tapizar una superficie plana. Tomen en cuenta los puntos marcados en la figura y contesten las preguntas.



a) ¿Qué polígonos regulares forman los arreglos de figuras? ______________________

____

b) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos que coinciden en el punto rojo en cada caso?

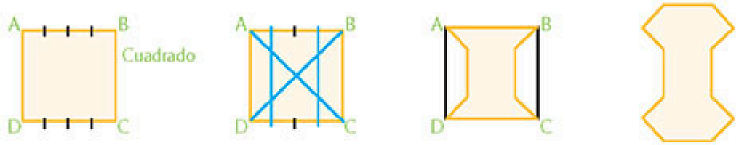
____

2. Determinen la medida de los ángulos de los polígonos y validen si es posible formar un teselado con esas figuras.

a) ¿En todos los casos es posible construir un teselado? Justifiquen su respuesta.

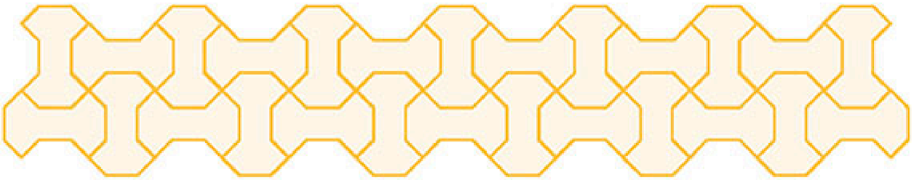
____

3. Analicen el siguiente diseño de una figura conocida como "polihueso".
A partir de un cuadrado se forma un hueso de la siguiente manera:



a) Escriban las instrucciones para obtener el polihueso a partir de las imágenes de arriba.

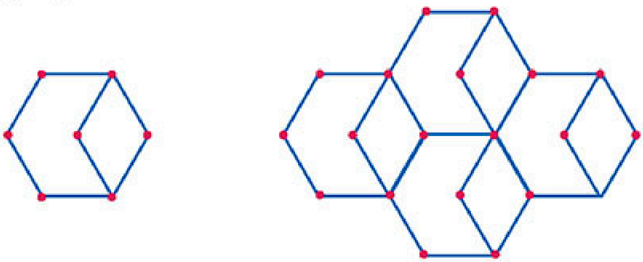
El teselado que se logra con el polihueso es el siguiente:



b) Verifiquen que se cumpla la condición de la suma de ángulos por cada vértice.

c) ¿Es posible generar un tapiz completo a partir de cortar un hexágono de una manera parecida a la del cuadrado? Expliquen su respuesta.

4. Iluminen de un color el rombo y de otro el polígono para decorar el teselado. Agreguen otras figuras para aumentarlo.



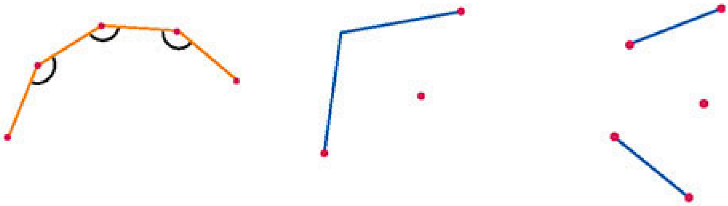
5. Comparen sus resultados con los de otra pareja; si existen diferencias, busquen llegar a acuerdos. Valídenlos con ayuda del profesor.

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Las siguientes figuras muestran secciones de polígonos regulares. Determina de qué polígonos se trata y complétalos.

_______________ _______________ _______________



2. Responde las siguientes preguntas.
   a) Si deseas trazar un polígono regular de nueve lados a partir de la medida de un lado, ¿cuál debe ser la medida de cada uno de sus ángulos internos? _______________
   b) ¿Cómo construirías un hexágono regular a partir de un triángulo equilátero? _______________

   ____

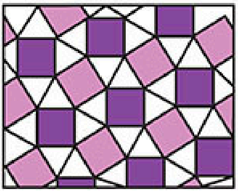
3. Traza en el siguiente espacio un cuadrado, un triángulo equilátero, un octágono y un pentágono.

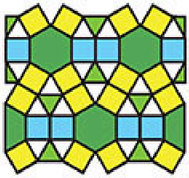
   a) ¿Con cuáles polígonos es posible cubrir el plano? _______________

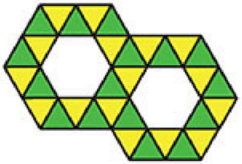
   ____
   b) ¿Con qué otro polígono puede combinarse un octágono para formar un teselado? Justifica tu respuesta. _______________

   ____

4. Explica cómo se construyen los siguientes teselados y por qué permiten cubrir un plano.

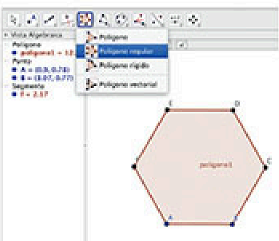


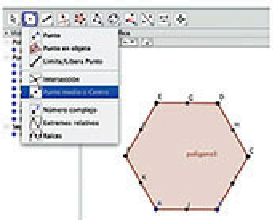


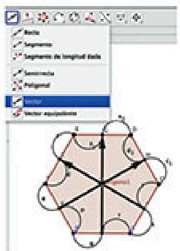


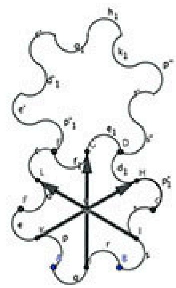
APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En un archivo de Geogebra intenta construir diferentes teselados, por ejemplo, los de la actividad 1 de la página 74 para verificar si es posible cubrir el plano.
2. También puedes construir tu propio teselado a partir de un hexágono regular, sigue los siguientes pasos:
   a) Traza un hexágono regular y los puntos medios de sus lados.
   b) Con el centro en los puntos medios, traza semicircunferencias que pasen por sus vértices (una por dentro y otra por fuera del hexágono, como muestran las imágenes).
   c) Elige la opción "Vector" y traza tres en la posición que muestran las imágenes.
   d) Oculta el hexágono y con la herramienta "Traslación" da clic sobre sobre las semicircunferencias (figura que se forma) y sobre cada vector. Observa lo que sucede.
   e) Continúa reproduciendo la figura hasta cubrir el plano.









3. Prueba la construcción de otros teselados a partir de la transformación de diferentes polígonos regulares.

Eje: Análisis de datos • Tema: Estadística • Aprendizaje esperado: Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

L8 Recolectando información

COMENZAMOS

Reflexiona y discute

Nuestras estaturas

Realicen, en equipo, la siguiente actividad.

1. Durante el receso, o en el momento que su profesor indique, pregunten a 50 compañeros de segundo grado su estatura.
   a) Anoten los resultados en centímetros en el siguiente espacio.

   b) ¿Cuántas estaturas diferentes obtuvieron? ____________________

   c) ¿Cuál estatura se repitió más veces? ____________________

   d) ¿Cuál se repitió menos veces? ____________________

2. Ahora, organicen en una tabla la información registrada en el recuadro anterior.

   a) Describan el procedimiento que siguieron para organizar la información en una tabla.

   ____

   b) ¿Consideran que una gráfica de barras sería conveniente para registrar la información?

   ¿Por qué? ____________________

3. Comparen su encuesta con la de otros equipos. Comenten qué tipo de gráfico es el más adecuado para registrar la información para que cualquier persona pueda interpretarla de manera clara y precisa. Escriban sus acuerdos en el siguiente espacio.

____

Gráficas de barras

Analicen en equipo la siguiente situación. Después, resuelvan lo que se pide.

1. En una encuesta a estudiantes de dos diferentes escuelas secundarias, se les preguntó qué cantidad de agua purificada toman al día. Las siguientes tablas representan una **muestra** de los datos recabados.
   a) Completen las tablas anotando la **frecuencia relativa**, expresada como fracción y porcentaje.

Secundaria 1		
Litros de agua	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1. Cero litros	25	
2. Hasta $\frac{1}{2}$ L	16	
3. Entre $\frac{1}{2}$ L y 1 L	54	
4. Entre 1 L y $1\frac{1}{2}$ L	76	
5. Entre $1\frac{1}{2}$ L y 2 L	45	
6. Entre 2 L y $2\frac{1}{2}$ L	22	
7. Entre $2\frac{1}{2}$ L y 3 L	12	

Secundaria 2		
Litros de agua	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
1. Cero litros	15	
2. Hasta $\frac{1}{2}$ L	28	
3. Entre $\frac{1}{2}$ L y 1 L	70	
4. Entre 1 L y $1\frac{1}{2}$ L	72	
5. Entre $1\frac{1}{2}$ L y 2 L	30	
6. Entre 2 L y $2\frac{1}{2}$ L	25	
7. Entre $2\frac{1}{2}$ L y 3 L	20	

   b) ¿En qué escuela es mayor el porcentaje de estudiantes que no consume agua?

   ____

   c) Si el consumo de agua recomendada al día es de 2 litros, ¿en cuál escuela consideran que el consumo de agua es más adecuado? Expliquen su respuesta. ______________________________

   ____

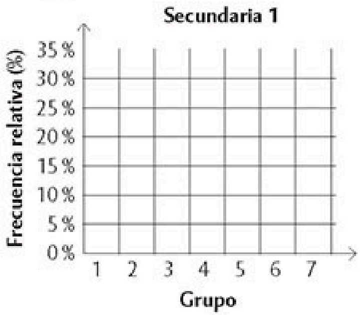
Glosario

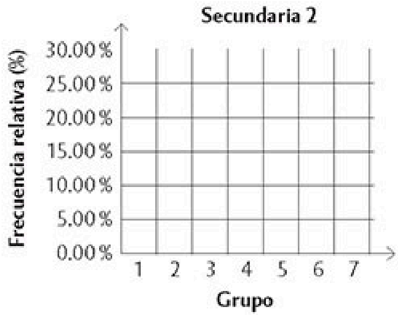
Frecuencia absoluta. Número de veces que el valor de la variable aparece en la muestra.

Frecuencia relativa. Es la comparación de la variable respecto al total de elementos de la muestra. Puede representarse en forma de fracción, en forma decimal o como porcentaje.

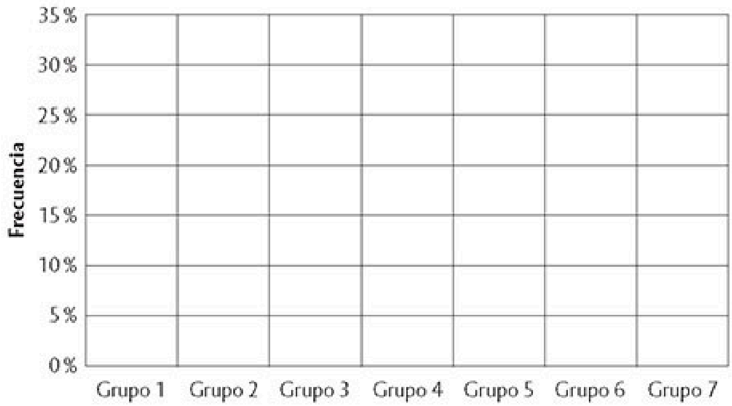
Muestra. Representación significativa de una población.

2. En los siguientes planos, tracen las gráficas de barras correspondientes a las tablas de la página anterior.





3. Ahora, construyan en el siguiente plano las dos gráficas de barras anteriores.



a) ¿En cuál de los registros es más fácil comparar el consumo de agua de ambas escuelas?

____

b) ¿En qué escuela hay un mayor porcentaje de estudiantes que consumen entre 2 y $2\frac{1}{2}$ L de agua? ¿Cómo se determina a partir de las gráficas? _______________

____

4. Comparen sus resultados con los de otro equipo; si existen diferencias, busquen llegar a acuerdos. Validen sus acuerdos con el profesor y escriban sus conclusiones sobre las ventajas de registrar este tipo de información en gráficas de barras.

____

____

Representación de los resultados de una encuesta

Glosario

Intervalo o clase. Conjunto de números comprendidos entre dos números determinados, por ejemplo, entre *a* y *b*.

Retomen la encuesta que realizaron al inicio de la lección y trabajen con el mismo equipo las siguientes actividades.

1. Anoten debajo de cada **intervalo** todos los valores que le correspondan a partir de los datos que obtuvieron en su encuesta. El símbolo "≥" significa "igual o mayor que". Por ejemplo, en la primera columna van todos los valores iguales o mayores que 140 cm y menores que 150 cm.

Estaturas en cm				
De 140 a menores que 150	De 150 a menores que 160	De 160 a menores que 170	De 170 a menores que 180	De 180 a menores que 190

APRENDEMOS

Un intervalo puede ser semiabierto por la izquierda o semiabierto por la derecha.

Por ejemplo, un intervalo semiabierto por la derecha se representa como: $[a, b)$, lo que es igual al conjunto de todos los números iguales o mayores que *a* y menores que *b*. Por ejemplo, en la tabla anterior, los intervalos son semiabiertos por la derecha y el primer grupo se simboliza así: $[140,150)$, que indica $140 \leq y < 150$.

Si el caso fuera al revés, es decir, si fuera semiabierto a la izquierda, entonces sería $(140,150]$ esto indicaría $140 < y \leq 150$, que en lenguaje común sería: estaturas mayores que 140 cm y menores o iguales que 150 cm.

2. Escriban la notación de cada intervalo semiabierto a la derecha, así como la frecuencia obtenida en cada uno para completar la tabla.

Intervalo o clase (cm)	Frecuencia
[1.40, 150)	

a) ¿Cuál intervalo tuvo mayor frecuencia? ______________________

b) ¿Cuál tuvo menor frecuencia? ______________________

c) ¿Qué ventajas tiene representar este tipo de información en intervalos? ______________________

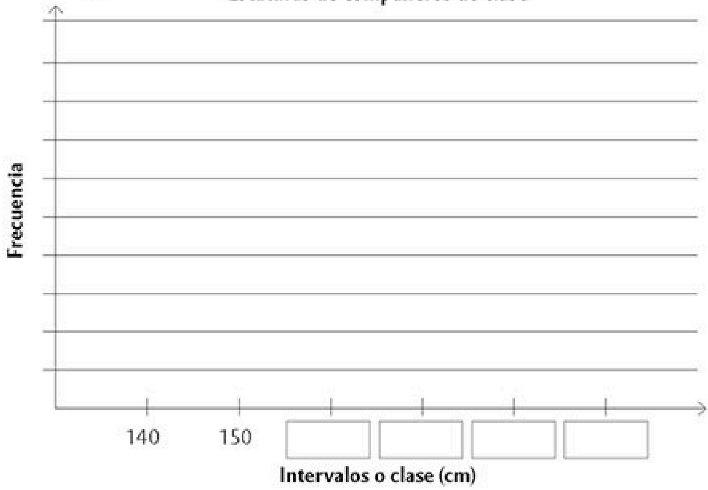
____

d) Sumen la frecuencia de cada intervalo y verifiquen que coincide con todos los datos obtenidos en su encuesta.

3. Ahora, elaboren en el siguiente plano la gráfica que muestre los resultados de la tabla de la página anterior. Para ello, realicen lo siguiente:

a) Primero, ubiquen los intervalos o clase en el eje de las abscisas (x) de manera continua.
b) Después, elijan la escala adecuada para anotar las frecuencias correspondientes en el eje de las ordenadas (y).
c) Por último, tracen las barras que le corresponde a cada intervalo con su frecuencia. Consideren que las barras deben ser iguales al ancho de cada intervalo, por tanto, deben ir pegadas.

Estaturas de compañeros de clase



4. Respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Por qué consideran que las barras deben ir pegadas unas con otras? ____________________

____

b) ¿Qué ventajas tiene representar la información de su encuesta en este tipo de gráficas por intervalos? ____

c) ¿Qué valor usarían como representativo de cada intervalo? Expliquen por qué. ________

____

d) ¿Qué diferencias observan entre estas gráficas y las gráficas de barras que trabajaron anteriormente? ____

5. Comparen sus gráficas con las de otro equipo. Después, en grupo, comenten las ventajas de representar información en este tipo de gráficas cuando la cantidad de valores es muy variado y disperso. Registren sus acuerdos.

____

____

APRENDEMOS

En estadística se manejan diferentes tipos de datos, como los cualitativos, éstos se refieren a cualidades o modalidades que no pueden expresarse numéricamente. Por ejemplo: los meses del año, el estado civil de las personas, etcétera.

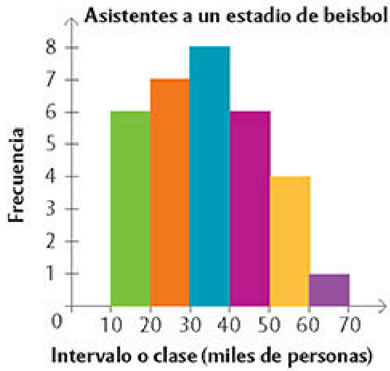
También existen los datos cuantitativos que se refieren a cantidades o valores numéricos y pueden ser discretos si toman valores enteros, por ejemplo, el número de hijos; o continuos, si toman un valor cualquiera dentro de un intervalo, como la estatura, el peso de las personas, entre otros.

Un histograma es una representación gráfica de frecuencias de **variables cuantitativas continuas** presentadas en forma de barras.

En el eje horizontal se posicionan las clases o intervalos de la variable continua (aunque pueden construirse verticalmente), los cuales se construyen del mismo tamaño, considerando el valor menor o mayor registrado en los datos. La frecuencia de cada intervalo se representa en el eje ordenado con unas barras entre las que no existe separación.

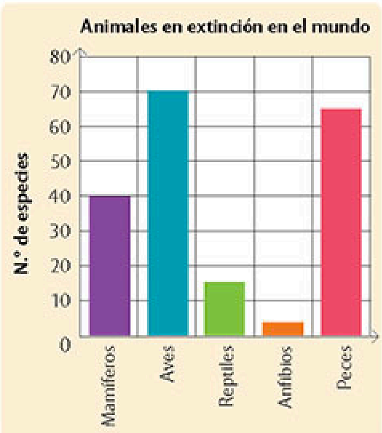
Por ejemplo, la siguiente tabla representa por intervalos de miles de personas el número de asistentes a un estadio de beisbol durante una temporada. Y, a partir de la tabla, se construyó el histograma de la derecha.

Intervalo o clase (miles de personas)	Frecuencia
[10, 20)	6
[20, 30)	7
[30, 40)	8
[40, 50)	6
[50, 60)	4
[60, 70)	1



Al agrupar los datos en intervalos, primero se determina el número de intervalos de clase, todos del mismo ancho o rango en que se dividirán los datos. Se conocen como **marcas de clase** a los puntos medios de cada intervalo y, dichos valores, se usan como dato representativo de cada intervalo.

La diferencia entre un histograma y una **gráfica de barras** como las que has trabajado antes, es que en estas últimas se representan datos cualitativos o cuantitativos discretos, donde las barras van separadas, como en el ejemplo de la derecha, que muestra el número de especies en peligro de extinción en el mundo.



Construcción de un histograma

En equipo, analicen la siguiente situación. Después, realicen lo que se pide.

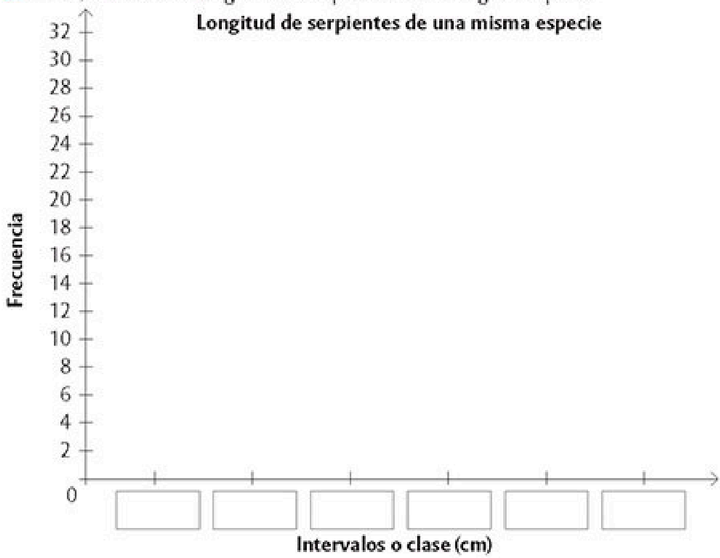
Las siguientes cifras corresponden al registro de la longitud, en centímetros, de serpientes de una misma especie analizadas por un grupo de expertos:

43, 41, 17, 24, 19, 34, 16, 45, 10, 36, 10, 17, 43, 25, 39, 44, 13, 33, 19, 44, 38, 28, 45, 33, 14, 12, 24, 19, 34, 16, 43, 25, 39, 44, 13, 33, 43, 41, 17, 24, 37, 19, 37, 16, 43, 25, 39, 44, 13, 19, 34, 16, 45, 10, 36, 43, 17, 24, 19, 16, 43, 25, 39, 43, 25, 39, 44, 13, 33, 43, 41, 17, 24, 19, 16, 43, 25, 39, 45, 30, 14, 12, 24, 19, 34, 16, 43, 24, 19, 16, 25, 39.

1. Ordenen los datos anteriores de menor a mayor en su cuaderno. Después, realicen lo que se pide.
   a) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? __________________________
   b) Si dividen los datos en cinco intervalos, ¿cuál sería la extensión de cada uno? ________
   c) Completen la siguiente tabla. Consideren cinco intervalos para el conjunto de datos e intervalos semiabiertos a la derecha.

Clase	Intervalo (cm)	Marca de clase (cm)	Frecuencia
1	[10,)		
2	[ )		
3	[ )		
4	[ )		
5	[, 45)		

2. Ahora, elaboren el histograma correspondiente en el siguiente plano.



3. Comparen su histograma con el de otro equipo. Discutan sobre los procedimientos para construirlos y la forma en que se dividen los valores del conjunto de datos en intervalos.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes preguntas. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero representa como intervalos continuos semiabiertos los siguientes valores: (3, 8] y [8, 13), ¿estaría cometiendo un error?, ¿por qué?
2. Si representa los siguientes intervalos: [3, 8) seguido de (8,11], ¿qué pasaría con el 8 en este caso? En grupo, validen sus respuestas con ayuda del profesor.

Del histograma al polígono de frecuencias

Lee atentamente la información. Después, realiza lo que se pide.

1. Con la finalidad de valorar los avances en velocidad lectora de un grupo de jóvenes de segundo grado de secundaria, se solicitó que leyeran un texto para tomar nota del número de palabras que leen por minuto. La siguiente tabla muestra el número de palabras por minuto que leyó cada estudiante.

141	141	148	137	144	145	151	135	148	160	137	152	140	150	155
156	142	157	157	157	157	151	148	150	136	148	142	148	155	155
156	145	148	158	144	142	142	146	150	154	155	137	155	138	138
156	145	148	158	148	144	142	147	137	154	146	155	155	155	139
147	147	142	154	160	155	154	147	142	152	146	137	138	148	140

a) ¿Cuántos jóvenes fueron evaluados? ______

b) ¿Cuál fue el menor número de palabras leídas? ______

c) ¿Cuál fue el mayor número de palabras leídas? ______

d) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? ______

APRENDEMOS

Un **intervalo abierto** se representa entre paréntesis, es decir, (*a*, *b*) y es igual al conjunto de todos los números comprendidos entre *a* y *b*, sin incluirlos a ellos. Por esta razón, cuando se usan intervalos abiertos se resta 0.5 al valor menor y se le suma 0.5 al valor mayor, con esto se evita que un valor quede sobre el límite de un intervalo.

1. Completa la siguiente tabla a partir de la información anterior.

Clase	Intervalo (palabras leídas por minuto)	Frecuencia	Marca de clase (palabras leídas por minuto)
1	(134.5,)	13	138
2			
3			
4			
5	(, 160.5)		

2. En los siguientes ejes coordenados elabora el histograma que corresponde a la información de la tabla anterior.

a) ¿Cuántos palabras leyeron la mayoría de estudiantes? ____________________

b) ¿Cuántos palabras leyeron la minoría de estudiantes? ____________________

3. Ahora, coloca un punto sobre cada barra en la marca de clase y traza segmentos de recta para unir los puntos, como muestra el ejemplo.
La línea poligonal que une los puntos medios o marcas de clase se conoce como polígono de frecuencias, siempre inicia desde cero y cierra en cero.

4. En equipo, redacten una conclusión con base en el histograma o polígono de frecuencias obtenido. Léanla en voz alta a sus compañeros.

____

____

APRENDEMOS

Las gráficas o polígono de frecuencias se construyen a partir de un histograma. Para construir el **polígono de frecuencias** se toma la **marca de clase** que coincide con el **punto medio** de cada **rectángulo** del histograma. Todos los polígonos de frecuencias inician y terminan en cero.

Cuando se trata de datos que varían con el tiempo conviene utilizar *gráficas similares a las gráficas poligonales*, pero se conocen como **gráficas de líneas**. La diferencia entre los polígonos de frecuencias y las gráficas de líneas es que estas últimas no inician ni acaban en cero.

Algo importante en las gráficas de líneas y polígonos de frecuencias es que permiten comparar dos conjuntos de datos. En las gráficas de línea el eje x expresa los valores de la variable tiempo.

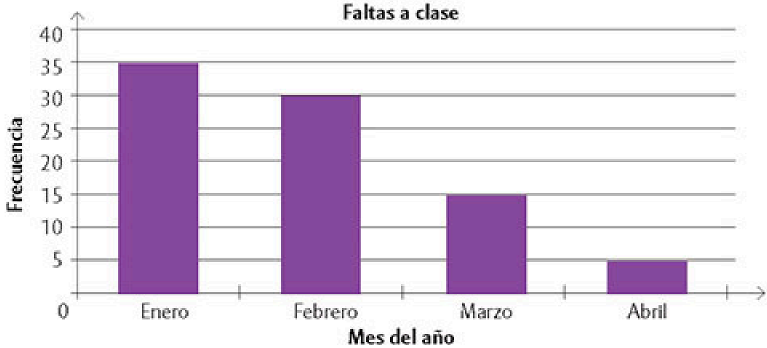
Gráficas de línea

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. La siguiente tabla muestra el número de faltas a clase de los alumnos de una escuela secundaria, durante diferentes meses.

Mes	Número de faltas
Enero	35
Febrero	30
Marzo	15
Abril	5

A partir de la tabla anterior, se construyó la siguiente gráfica de barras.



a) ¿Por qué la información no se puede presentar con un histograma? __________

____

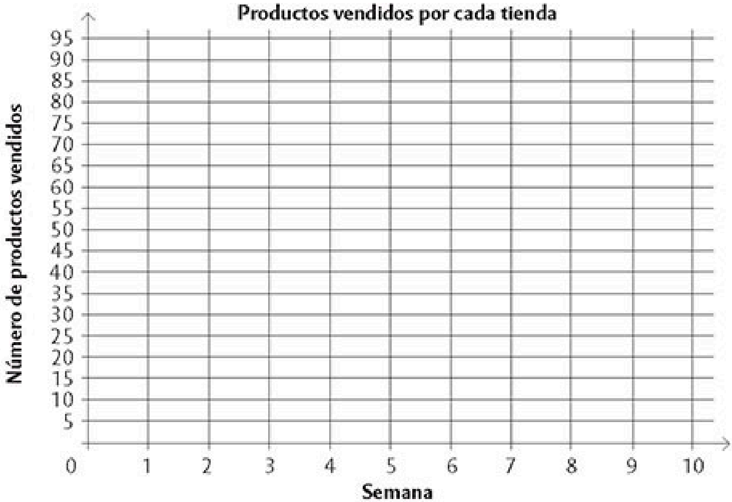
b) Construyan la gráfica de líneas correspondiente a la información anterior. Ubiquen el punto que corresponde a cada mes y únanlos con segmentos de recta.

c) ¿Por qué la gráfica de líneas no inicia ni termina en cero? __________

____

2. Analicen la información de la tabla y construyan la gráfica de líneas correspondiente. Después, respondan las preguntas.
La siguiente tabla muestra el número de piezas vendidas, en semanas consecutivas, de cierto producto por dos distintas sucursales de una misma tienda comercial.

	Número de productos vendidos									
Número de semana	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tienda A	35	86	45	79	65	83	28	18	23	45
Tienda B	25	38	79	81	40	31	29	14	45	48



a) ¿En qué semana existió mayor diferencia entre las dos tiendas? ____________________

b) ¿En qué semana la diferencia fue menor? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica? ________

____

c) Con la información de la gráfica, ¿pueden determinar qué tienda obtuvo mejores ventas? Expliquen su respuesta. ____________________

d) ¿A qué conclusión pueden llegar a partir del análisis de esta gráfica? ____________

____

3. En grupo, registren sus conclusiones sobre las diferencias entre un histograma y una gráfica de barras, y entre un polígono de frecuencias y una gráfica de líneas. ¿Cuál es la utilidad de este tipo de gráficas en su vida cotidiana?

____

____

Crea y evalúate

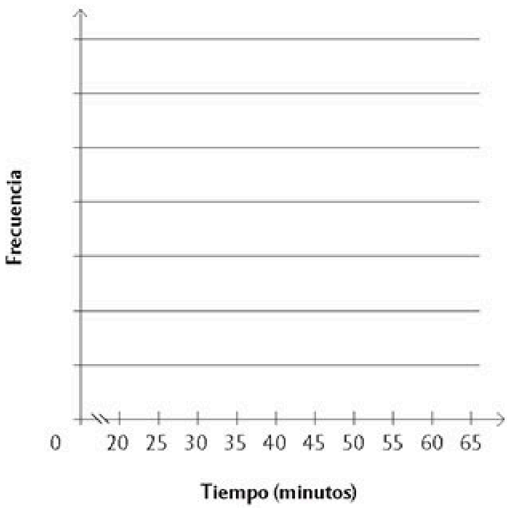
CONCLUIMOS

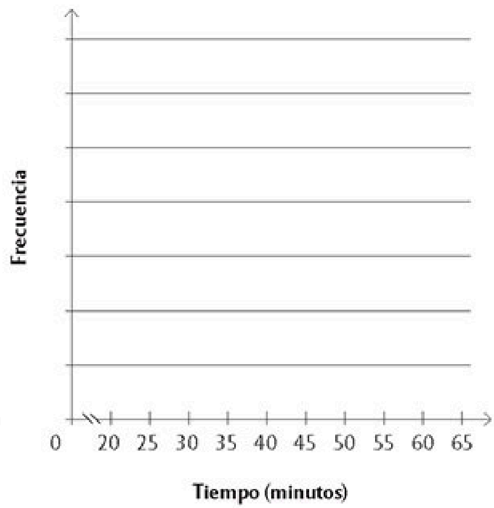
Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. La siguiente tabla muestra la información recabada en un estudio sobre el tiempo que los empleados tardan en capacitarse para sus labores en una fábrica.
   a) Completa los valores que faltan en la tabla.

Intervalo (min)	Frecuencia	Marca de clase (min)	Longitud del intervalo
(20, 25)	6		
(25, 30)	4		
(30, 35)	26		
(35, 40)	18		
(40, 45)	42		
(45, 50)	14		
(50, 55)	35		
(55, 60)	12		
(60, 65)	21		

   b) Con los valores de la tabla anterior, elabora un histograma en el plano de la izquierda y traza el polígono de frecuencias en el plano de la derecha.





2. En una escuela se obtuvieron los siguientes puntajes en un examen de matemáticas:
6, 7, 14, 31, 32, 30, 25, 17, 13, 25, 6, 8, 14, 30, 31, 26, 40, 17, 20, 45, 7, 15, 24, 26, 36, 41, 35, 17, 20, 39, 12, 24, 24, 38, 26, 43, 41, 17, 36, 17.

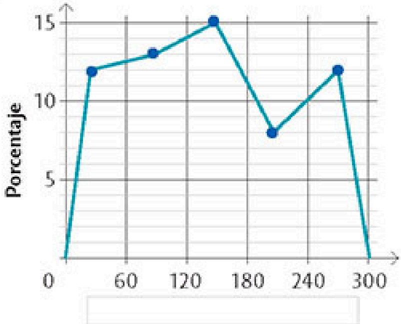
a) Elabora una tabla de frecuencias por intervalos en tu cuaderno y traza el histograma y polígono de frecuencias en el mismo plano.

b) ¿Cuántos intervalos estableciste? ______________________

c) ¿Cuál fue el ancho de cada uno? ______________________

3. Completa la tabla con un conjunto de datos que pueda ser representado por el polígono de frecuencias de la derecha y construye el histograma correspondiente. Incluye las unidades a las que se refieren los intervalos y la marca de clase.

Clase	Intervalo	Marca de clase	Porcentaje
1			
2			
3			
4			
5			

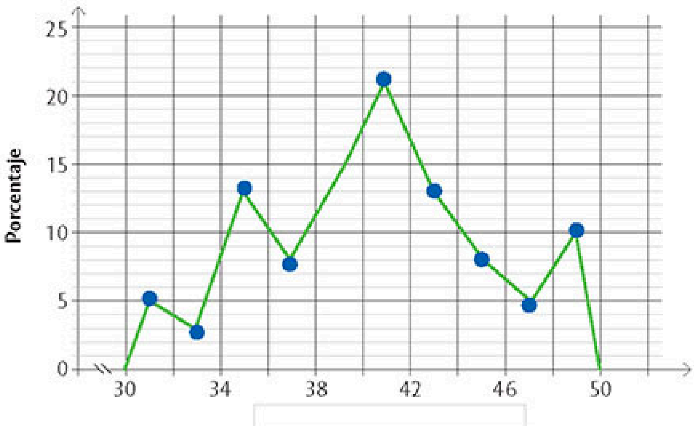


a) Situación que representa la gráfica poligonal: ______________________

____

____

4. Dado el siguiente polígono de frecuencias, reconstruye el histograma y la tabla de frecuencias relativas correspondiente en tu cuaderno.



APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

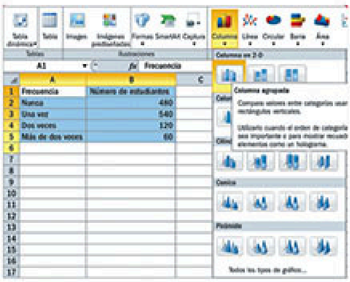
Una hoja de cálculo electrónica es muy útil para generar gráficas a partir de ciertos datos.

1. Abre un archivo y construye una gráfica de líneas con la siguiente información.
   a) En la columna A, anota las opciones que representan la frecuencia con la que un grupo de estudiantes acude a una biblioteca; y en la columna B, la frecuencia o número de estudiantes que corresponde a cada opción, como se muestra en la siguiente imagen.

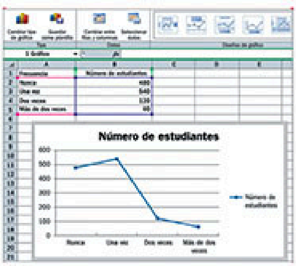
B6 fx

	A	B
1	Frecuencia	Número de estudiantes
2	Nunca	480
3	Una vez	540
4	Dos veces	120
5	Más de dos veces	60
6		
7		

   b) Selecciona todas las celdas donde se presenta la información y elige el tipo de gráfico que deseas generar, en este caso elige la opción "Línea".



   c) Al insertar el gráfico, es posible cambiar algunos aspectos del formato, explora la herramienta y modifica la escala, color de la línea, etcétera.



2. Elige alguna de las tablas de datos que generaste en las actividades o una de las que se proporcionaron en la lección y construye los histogramas o polígonos de frecuencia que le correspondan.

3. Muestra a tu profesor el resultado y anota tus conclusiones en tu cuaderno.

P1 Herramientas matemáticas

A lo largo del presente módulo exploraste la relación entre los ángulos de polígonos regulares y usaste dicha relación en la construcción de los mismos.

1. Exploraremos de manera general los ángulos interiores, centrales y externos de un polígono regular a través de la aplicación Geogebra.
   a) Da clic en la pestaña "Archivo" y luego en "Vista gráfica" y elige la opción "Mostrar los ejes".

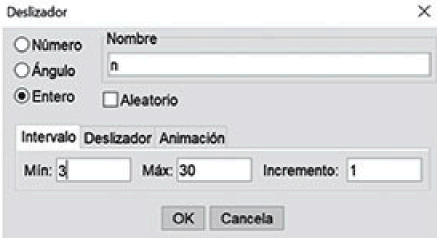


Imagen 1

   b) Con la herramienta Segmento construye un segmento de tres unidades sobre el eje x y con Deslizador coloca un deslizador; después, elige "Entero", llámalo n y utiliza un intervalo de 3 a 30, como muestra la imagen 1.

   c) Ahora, con la herramienta "Polígono regular" construye un polígono sobre los extremos del segmento con número de vértices n.

   d) Mueve el deslizador para validar que el polígono cambia, según el número que aparece en el deslizador.

2. Regresa el deslizador a $n = 3$ y con Medio o Centro determina el centro del polígono.

   a) Construye el ángulo central del polígono y obtén la media con Ángulo, como se observa en la imagen 2.

   b) Utiliza la herramienta Semirrecta y prolonga el lado del polígono sobre el eje x; luego, coloca un punto sobre la semirrecta y determina la media del ángulo interior y del exterior del polígono, como se puede ver en la imagen 3.

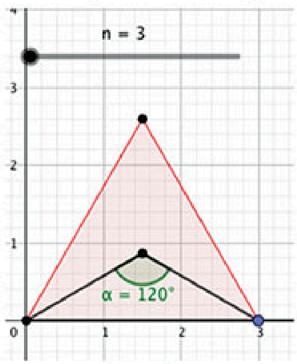


Imagen 2

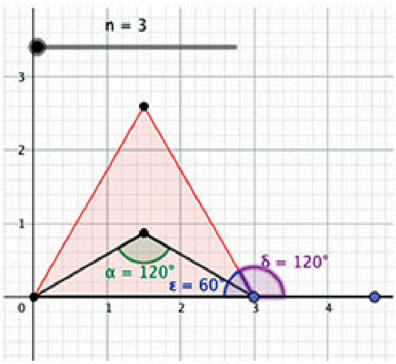
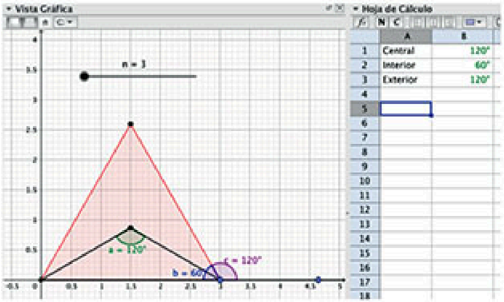


Imagen 3

   c) Mueve el deslizador y observa cómo se modifica la medida de los ángulos.

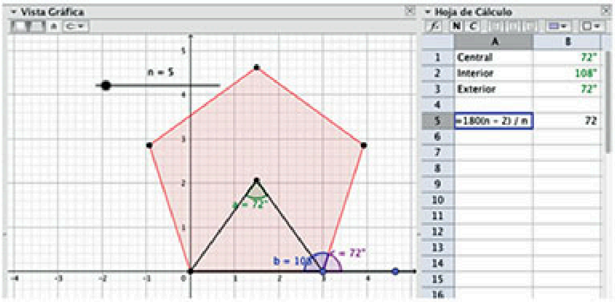
3. En la opción "Vista", utiliza una hoja de cálculo y captura las medidas de cada ángulo.
   a) En la hoja de cálculo en la columna A escribe los nombres de los ángulos: Central, Interior y Exterior.
   b) En la columna B escribe el nombre que tiene cada ángulo en la fila correspondiente para que aparezca su medida, como muestra la imagen 4.

Imagen 4



4. Utiliza el deslizador *n*, las medidas de los ángulos y la hoja de cálculo para contestar las siguientes preguntas.
   a) Con la ayuda del deslizador *n* desarrolla las fórmulas del ángulo interior y central en la hoja de cálculo, como muestra la imagen 5.

Imagen 5



   b) ¿Qué relaciones observas entre el ángulo central y el ángulo interior?

   c) ¿Qué relación hay entre el ángulo central y el exterior de los polígonos?

   d) ¿Cuánto miden los ángulos centrales e interiores de un polígono de 24 lados?

5. Comparte tu trabajo con el de otro compañero. Comenten sobre la experiencia y compártanla con su profesor. Aclaren las dudas en grupo.

Evalúate. Mide tu desempeño

Estima tu nivel de desempeño y, antes de la evaluación, regresa a la lección correspondiente a cada indicador y realiza una actividad de repaso, en el tema que requieres.

Indicador	Niveles de desempeño		
	Me resulta complicado	Necesito apoyo	Logro resolverlo solo
Resuelvo multiplicaciones que combinan fracciones y números decimales positivos y negativos, y divisiones de fracciones.			
Resuelvo problemas de potencias con exponente positivo y negativo.			
Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa e identifico la constante de proporcionalidad.			
Identifico y represento expresiones algebraicas equivalentes a partir de las reglas de una sucesión.			
Deduzco y utilizo las relaciones entre los ángulos de polígonos regulares para construirlos e identifico aquellos que pueden cubrir el plano.			
Recolecto, registro e interpreto información en histogramas, en polígonos de frecuencias y en gráficas de línea.			

Evaluación. Primer periodo

Lee atentamente los problemas y resuelve lo que se pide.

1. Una empresa contrató personal para la limpieza de los vidrios de un edificio. La disponibilidad del personal varía, así que la empresa decidió elaborar una tabla que muestre la relación entre la cantidad de gente que requiere para limpiar los vidrios y el tiempo que se invierte. Ayúdalos a completarla.

Tiempo (horas)	36	24	12	9	6	3
Número de personas	2					

a) ¿Qué hiciste para determinar los valores faltantes? Justifica tu respuesta.

____

b) ¿Cuál es la constante de proporcionalidad entre las variables? ______________

2. En un laboratorio químico industrial hay escasez de reactivos y el encargado debe distribuir dos diferentes reactivos entre varias plantas. Cuenta con $16\frac{3}{4}$ L de ácido clorhídrico y $24\frac{2}{3}$ L de benceno. El encargado debe colocar cada reactivo en envases de $\frac{3}{8}$ L para repartirlos a las diferentes plantas.

   a) ¿Cuántos envases puede llenar con el ácido clorhídrico? ____________________

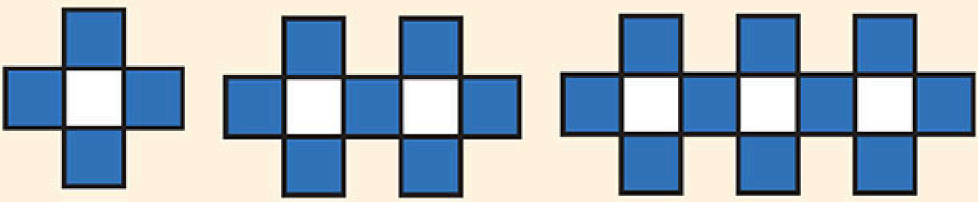
   b) ¿Cuántos envase de benceno llenará por completo? ____________________

3. El tablero numérico de abajo funciona de la siguiente manera:
   - Los números en las casillas lilas se obtienen al multiplicar los números de las filas por los de las columnas, por ejemplo: $-5 \times (-3)$, etcétera.
   - Los resultados de las casillas blancas se obtienen al sumar las casillas lilas, horizontal y diagonalmente.

   a) Completa el tablero numérico con números enteros, pueden ser positivos o negativos.

	−3			
−5				
−1		−7		
		14	−8	

4. Mario formó la siguiente sucesión de cuadrados azules y quiere dibujar en su computadora la figura que ocupa el lugar 103 de la sucesión. Para ello, ingresó la fórmula $3n + 1$ que corresponde a la sucesión, pero la computadora la rechazó, así que intentará con una fórmula equivalente.



¿Cuál de las opciones representa una sucesión equivalente a la que tiene Mario?

a) $4 + 3(n - 1)$ b) $3(n + 1) + 4$ c) $3(n + 1)$ d) $4 - 3(n + 1)$

5. En un laboratorio farmacéutico están probando un nuevo antibiótico. Hay una población de 5^{13} bacterias; al aplicarles el nuevo medicamento, cada hora la población se reduce en una quinta parte.

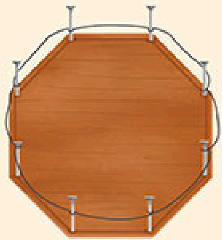
a) ¿Cuántas bacterias habrá después de 10 horas? Explica tu respuesta. ______________

____

____

____

6. Mariana hace atrapasueños, para ello utiliza una tabla con forma octagonal con clavos en cada vértice unidos con hilo negro, como se observa en la imagen.



a) 5

b) 40

c) 6

d) 20

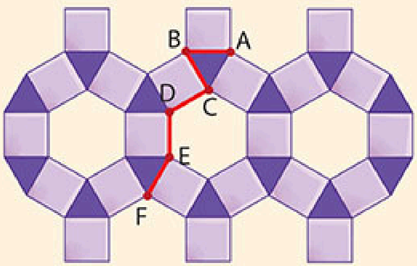
Para crear la red del atrapasueños une cada clavo o vértice con todos los otros, excepto con los que están a su lado, con un hilo de diferente color y sin volver a unir los que ya están unidos. Además del hilo negro, ¿cuántos colores diferentes necesitará?

7. Para un concurso de robótica, un equipo de alumnos de mecatrónica programó un robot para realizar un recorrido sobre los lados de los polígonos que forman una teselación, como se muestra en la imagen.

a) ¿Qué características tienen las figuras que permiten formar un teselado? ______________

____

b) Completa el valor de los ángulos que se forman con el trayecto del robot.

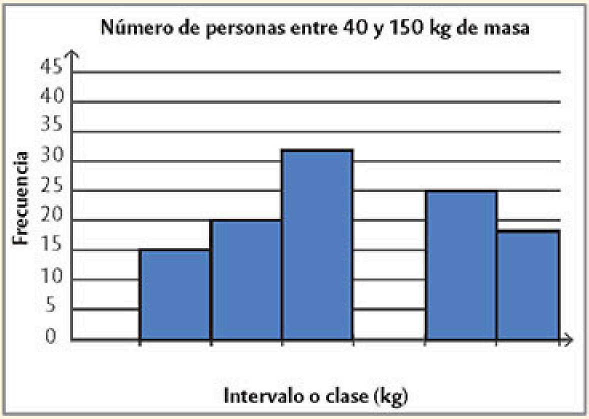


Ángulo	Valor
ABC	
BCD	
CDE	
DEF	

8. En una jornada de la salud, un grupo de voluntarios tomó la masa de 150 adolescentes. Con la información recabada elaboraron un histograma. El rango de los datos fue de 40 kg a 100 kg.

a) Determina los intervalos que se usaron y completa la tabla de datos y el histograma.
b) Al finalizar, elabora el polígono de frecuencias que corresponde al histograma.

Intervalo (kg)	Marca de clase (kg)	Frecuencia
	75	40
	95	18



Mide tu avance

Califica tu examen, en grupo, y anota tus resultados en la siguiente tabla.

En caso de que tu respuesta no haya sido correcta, regresa a la lección y páginas que se sugieren para repasar el contenido.

Reactivo	Contenido	Respuesta	Sugerencia
1	Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa.		Lección 4, página 48
2	Resuelvo divisiones de fracciones.		Lección 1, página 24
3	Resuelvo problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.		Lección 2, página 31
4	Represento de forma equivalente expresiones algebraicas de primer grado formuladas a partir de sucesiones.		Lección 5, página 55
5	Resuelvo problemas de potencia con exponente entero.		Lección 3, página 42
6	Reconozco y calculo el número de diagonales de un polígono.		Lección 6, página 66
7	Identifico la medida de los ángulos de los polígonos regulares que permiten cubrir un plano.		Lección 7, página 74
8	Interpreto información representada en un histograma y construyo el polígono de frecuencias correspondiente.		Lección 8, página 83

Periodo 2

En este periodo abordarás los siguientes aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
- Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencias de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).
- Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
- Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos.

Además, en este segundo periodo...

- se extenderán las operaciones multiplicativas de los números enteros a las fracciones, trabajando relaciones de fracciones con signo;
- trabajarás algunos aspectos sobre aproximaciones de raíces cuadradas mediante diferentes métodos;
- abordarás problemas relacionados con el reparto proporcional, realizando repartos que resulten justos para quienes participan en él a través de diferentes procedimientos;
- aplicarás diferentes métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, lo que te permitirá tomar decisiones sobre el procedimiento más adecuado, según el contexto del problema;
- realizarás conversiones entre unidades de medida del Sistema Internacional de Medidas (SI) y el sistema inglés;
- expresarás perímetros y áreas de figuras geométricas a partir de expresiones algebraicas equivalentes, usando modelos geométricos;
- calcularás perímetros y áreas de polígonos regulares e interpretarás medidas de tendencia central y dispersión.

Conviene que con tus compañeros reflexiones sobre los contenidos que conoces y analices algunos problemas que puedas resolver con ellos. Esto con la finalidad de que puedas anticipar posibles formas o procedimientos de solución de los problemas relacionados con los nuevos contenidos.

Los objetos redondos o con forma circular, como las ruedas de una bicicleta, se han utilizado desde épocas muy antiguas por el hombre. Ya desde aquellas épocas remotas, se insinuaba la relación entre el contorno de un círculo (circunferencia) y su radio (el número pi = 3.1416...). Arquímedes fue uno de los primeros en aproximarse al valor de pi. Este valor resultó clave para calcular las longitudes y áreas de los cuerpos redondos.

L9 Operaciones con enteros y fracciones

COMENZAMOS Reflexiona y discute

Más sobre los números positivos y negativos

Lee la información. Después, resuelve las siguientes actividades.

1. Pedro tiene una cuenta de ahorros en el banco. La tabla que se muestra a continuación corresponde a un resumen de su cuenta de un trimestre. Completa la tabla escribiendo el saldo de Pedro al final de cada mes.

Comportamiento	Agosto	Septiembre	Octubre	Total
Interes a favor ($)	+275.67	+110.05	+242.19	
Depósitos/abonos ($)	+4 300.00	+1 500.00	+2 350.00	
Retiros/cargos ($)	–1 500.00	–1 575.00	–75.00	
Impuestos del mes ($)	–124.36	–124.36	–124.36	
Saldo final ($)				

a) ¿En qué mes el saldo es un número negativo? __________

c) ¿Cómo escribirían la suma (–124.36) + (–124.36) + (–124.36) como una multiplicación?

¿Cuál es el resultado? __________

2. Con base en la relación entre la multiplicación y la división, resuelve las siguientes divisiones.

a) (+27) ÷ (+9) = __________ b) (+27) ÷ (–9) = __________

c) (–27) ÷ (+9) = __________ d) (–27) ÷ (–9) = __________

3. Resuelve las siguientes multiplicaciones de números positivos y negativos.

a) (+7) × (+12) = __________ b) (+11) × (–13) = __________

c) (–23) × (+14) = __________ d) (–35) × (–29) = __________

4. Utilizando los resultados anteriores determina el resultado de las siguientes divisiones:

a) (+84) ÷ (+12) = __________ b) (–143) ÷ (+11)= __________

c) (–322) ÷ (–23) = __________ d) (1 015) ÷ (–29)= __________

5. Compara tus respuestas con las de un compañero. Juntos, respondan: ¿qué factor falta en la multiplicación 8 × ______ = –136?, ¿por qué? Comenten sobre la relación de la multiplicación y la división, y cómo puede ayudar a determinar que el resultado de una división es un número positivo o negativo. Escriban sus conclusiones.

Resultados de divisiones de fracciones

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Retomen el juego de fichas rojas (positivas) y amarillas (negativas) de la lección 2 y completen la tabla. Relacionen los tres números por medio de una división de números positivos y negativos.

Fichas que se ponen	Veces que se ponen	Número a obtener	Relación entre las cantidades por medio de una división
(−6)		(+72)	
(+7)	(+16)	(+112)	(+112) ÷ (+7) = (+16)
(+12)		(−324)	
(−17)		(−561)	

2. A partir de los resultados de la tabla establezcan una regla para saber si el resultado de una división de números positivos y negativos es un número positivo o negativo. ________

____

3. Analicen las siguientes parejas de divisiones y respondan la pregunta.

Las divisiones entre números enteros pueden representarse como una fracción. Por ejemplo, la división, como muestran los siguientes casos:

a) $\frac{12}{-4}$ y $\frac{-12}{4}$ = ________ b) $\frac{121}{11}$ y $\frac{-121}{-11}$ = ________

c) $\frac{-36}{12}$ y $\frac{36}{-12}$ = ________ d) $\frac{-56}{-8}$ y $\frac{56}{8}$ = ________

e) ¿Qué relación hay entre el cociente de cada par de divisiones? ¿Por qué se da dicha relación? ________

____

f) Resuelve en tu cuaderno las operaciones anteriores y anota el cociente correspondiente a cada caso.

Hasta este momento en todas las divisiones de esta lección se ha obtenido como resultado un número entero, es decir, son exactas. Pero también es posible dividir fracciones y, para ser coherentes con lo anterior, en el caso de divisiones de números positivos y negativos no exactas se deben cumplir también las mismas relaciones.

4. Escriban el cociente de las siguientes parejas de divisiones como fracción y como número decimal.

a) $\frac{7}{-4}$ y $\frac{-7}{4}$ = ☐ b) $\frac{-3}{4}$ y $\frac{3}{-4}$ = ☐

c) $\frac{8}{5}$ y $\frac{-8}{-5}$ = ☐ d) $\frac{-5}{-9}$ y $\frac{5}{9}$ = ☐

5. En cierto lugar la temperatura varió -3°C durante 4 1/2 horas de manera constante.

a) ¿Cuánto varió la temperatura cada hora? ___________

b) ¿Qué operación de número positivos y negativos permite obtener la respuesta?

____

6. Consideren las siguientes igualdades, que representan divisiones de números positivos y negativos. ¿Qué tipo de número: positivo o negativo pueden tener las fracciones relacionadas con los siguientes cocientes de números enteros? Escriban la fracción positiva o negativa correspondiente.

a) $\frac{9}{-11} = \frac{-9}{11} = \square$ b) $\frac{7}{21} = \frac{-7}{-21} = \square$ c) $\frac{-12}{15} = \frac{12}{-15} = \square$ d) $\frac{-17}{-25} = \frac{17}{25} = \square$

7. Escriban de dos maneras las siguientes fracciones, como una división de números enteros.

a) $-\frac{2}{3} = \square = \square$ b) $-\frac{4}{7} = \square = \square$ c) $\frac{12}{5} = \square = \square$ d) $-\frac{25}{11} = \square = \square$

8. Como pudieron notar, aunque los resultados de estas divisiones no son números enteros, sino fracciones o números decimales, deben ser positivas o negativas. Comenten lo anterior con otras parejas y respondan: ¿existe alguna diferencia al dividir números enteros y fracciones de números positivos y negativos? Escriban sus acuerdos en su cuaderno.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente pregunta. Después, comparte tu opinión con un compañero.
Si un compañero te dice que cuando se divide un número positivo entre otro número positivo, el resultado es un número positivo, entonces, el resultado de dividir dos números negativos debe ser un número negativo. ¿Estás de acuerdo con su afirmación? ¿Qué le dirías?

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Escribe las siguientes fracciones como divisiones de números positivos y negativos.

a) $+\frac{1}{3} = \square$ b) $+\frac{4}{5} = \square$ c) $+\frac{2}{7} = \square$ d) $+\frac{8}{9} = \square$

e) $-\frac{2}{7} = \square$ f) $-\frac{4}{9} = \square$ g) $-\frac{8}{15} = \square$ h) $-\frac{9}{25} = \square$

2. Escribe las fracciones positivas y negativas que corresponden a las siguientes divisiones.

a) $\frac{19}{-21} = \square$ b) $\frac{27}{31} = \square$ c) $\frac{-42}{27} = \square$ d) $\frac{-137}{-257} = \square$

3. ¿Cuál debe ser el resultado de sumar una fracción con su simétrico? Escribe un ejemplo que justifique tu respuesta.

____

Multiplicaciones de fracciones positivas y negativas

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. En un almacén se han detectado los siguientes robos hormiga en el departamento de encurtidos: los paquetes de jamón amanecen con −1/4 de su contenido, los paquetes de salchichas, con −1/8 de su contenido y los de queso con −1/5.
   a) Si esto viene sucediendo desde hace 45 días, ¿cuál ha sido la perdida total de cada producto? ______
   b) Expresa dichos números como positivos y negativos según corresponda. ______
2. Escriban el resultado de las siguientes multiplicaciones que tienen un factor que es un número entero y otro factor que es una fracción.

   a) $5 \times \frac{3}{7} = \square$ b) $(-4) \times \frac{7}{3} = \square$ c) $8 \times (-\frac{1}{6}) = \square$ d) $(-7) \times (-\frac{4}{9}) = \square$

   e) Expliquen sus resultados. ______
3. Ahora, escriban el resultado de las siguientes multiplicaciones de fracciones positivos y negativos.

   a) $\frac{4}{7} \times \frac{8}{3} = \square$ b) $(-\frac{5}{9}) \times \frac{8}{3} = \square$ c) $\frac{7}{12} \times (-\frac{5}{6}) = \square$ d) $(-\frac{7}{5}) \times (-\frac{4}{11}) = \square$
4. Escriban las fracciones de las tres últimas multiplicaciones de la actividad anterior como divisiones de enteros y resuélvanlas. Consideren que cuando hay signos negativos, hay más posibilidades para combinar los signos.

   a) $(-\frac{5}{9}) \times \frac{8}{3} = \square \times \square = \square$ b) $\frac{7}{12} \times (-\frac{5}{6}) = \square \times \square = \square$ c) $(-\frac{7}{5}) \times (-\frac{4}{11}) = \square \times \square = \square$

   d) ¿Los resultados fueron los mismos? Escriban los pasos que deben realizar para multiplicar fracciones positivas y negativas. ______
5. Contesten las siguientes preguntas con base en los ejercicios anteriores.
   a) Dada una fracción positiva, ¿qué signo debe tener otra fracción para que al multiplicarla por la primera dé como resultado un número positivo? ______
   b) Dada una fracción positiva, ¿qué tipo de fracción debe ser el otro factor para que al multiplicarlas el resultado sea un número negativo? ______
   c) Dada una fracción negativa, ¿qué tipo de fracción debe ser el otro factor para que al multiplicarlas el resultado sea un número positivo? ______
   d) Dada una fracción negativa, ¿qué tipo de fracción debe ser el otro factor para que al multiplicarlas el resultado sea un número negativo? ______
6. Comparen sus resultados con los de otra pareja. Discutan las diferencias y similitudes de multiplicar números enteros y fracciones de números positivos y negativos.

Divisiones de fracciones positivas y negativas

Lee la información. Después, resuelve lo que se pide.

De manera similar a lo que se trabajó con números enteros, es posible encontrar la forma para dividir fracciones positivas y negativas.

1. Encuentra el resultado de las siguientes divisiones de fracciones positivas y negativas.

   a) $\frac{3}{7} \div \frac{8}{5} = \square$ b) $\frac{8}{11} \div (-\frac{4}{9}) = \square$ c) $(-\frac{7}{11}) \div (-\frac{10}{12}) = \square$

   d) ¿Podemos relacionar las divisiones entre fracciones positivas con la forma en que se realizan las divisiones de fracciones positivas y negativas? Justifica tu respuesta.

   ____

2. Resuelve las divisiones por medio de una multiplicación y escribe el resultado. Es importante analizar todos los casos posibles cuando las fracciones son negativas.

   a) $(-\frac{5}{9}) \div \frac{8}{7} = \boxed{\quad \times \quad = \quad}$ b) $\frac{7}{9} \div (-\frac{5}{6}) = \boxed{\quad \times \quad = \quad}$

   c) $(-\frac{7}{11}) \div (-\frac{4}{3}) = \boxed{\quad \times \quad = \quad}$ d) $(-\frac{9}{4}) \div (-\frac{3}{2}) = \boxed{\quad \times \quad = \quad}$

3. Comenta con un compañero los pasos que deben seguir para dividir fracciones positivas y negativas. Después, responde las preguntas. Al finalizar, comparen sus respuestas con las de otros compañeros.

   a) ¿Qué tipo de número debe representar una fracción para que al dividirla con una fracción positiva el resultado sea un número positivo? ______________________________

   b) ¿Qué características deben tener dos fracciones para que al dividirse el cociente sea un número negativo? ______________________________

   c) Dada una fracción negativa, ¿la otra fracción debe ser positiva o negativa para que al dividirlas el resultado sea una fracción positiva? ______________________________

APRENDEMOS

Las reglas para la multiplicación y la división de números decimales y de fracciones positivas y negativas, son las mismas que ya viste con los números enteros; basta entender y recordarlas.

De la misma forma, las reglas para multiplicar y dividir este tipo fracciones y decimales, son las mismas que se usan al operar con números positivos.

Multiplicación:	(positivo) × (positivo) = (positivo)	(positivo) × (negativo) = (negativo)
	(negativo) × (positivo) = (negativo)	(negativo) × (negativo) = (positivo)
División:	(positivo) ÷ (positivo) = (positivo)	(positivo) ÷ (negativo) = (negativo)
	(negativo) ÷ (positivo) = (negativo)	(negativo) ÷ (negativo) = (positivo)

Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Retoma la situación planteada al inicio de la lección para resolver lo que se pide.

a) $(-\frac{3}{4}) \times \frac{5}{8} = \square$ b) $\frac{9}{11} \times (-\frac{2}{8}) = \square$ c) $(-\frac{4}{7}) \times (-\frac{9}{5}) = \square$

2. Como sabes, las divisiones de fracciones se escriben con la siguiente notación: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{e}{f}$, pero también se acostumbra escribirlas con otra notación: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$.

   a) ¿Cómo calcularías el valor de *e* y *f* conociendo los valores de *a*, *b*, *c* o *d*? (Recuerda que siempre hay que tener en cuenta que ni *b* ni *d* son cero). ________________

3. Escribe positivo o negativo para que el resultado de cada división sea el que se indica.

   a) $\frac{\text{positivo}}{}$ = positivo b) $\frac{}{\text{negativo}}$ = negativo c) $\frac{\text{negativo}}{}$ = negativo

   d) $\frac{\text{negativo}}{}$ = negativo e) $\frac{}{\text{positivo}}$ = positivo f) $\frac{}{\text{negativo}}$ = negativo

4. Encuentra el resultado de las siguientes divisiones de fracciones, descomponlas de diferentes maneras en cocientes de números enteros.

a) $(-\frac{7}{10}) \div \frac{9}{14} = \square$ b) $\frac{2}{11} \div (-\frac{3}{5}) = \square$ c) $(-\frac{2}{9}) \div (-\frac{9}{11}) = \square$

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En algunas calculadoras no se pueden realizar operaciones de fracciones positivas y negativas. ¿Cómo realizarías operaciones de divisiones con este tipo de calculadoras? Explora tu calculadora y resuelve en ellas algunas de las operaciones resueltas en la lección.

2. Puedes hacer operaciones con números positivos y negativos en hojas de cálculo electrónicas. Para operar con fracciones, debes dar formato de fracción a las celdas correspondientes:

   a) Elige las celdas en las que vas a trabajar (de las columnas A a la C) y en la ventana "Formato", elige la opción "Número" y después "Fracción".

   b) En las celdas que elegiste en las columnas A y B, anota diferentes fracciones: positivas y negativas. En las celdas de la columna C, utiliza las fórmulas para la multiplicación y la división, combina las fracciones para operar con ellas, por ejemplo, en C2 escribe: =A2/B4 o en C3, =A4*B1.

SUM fx =A2 / B4

	A	B	C
1	2/3	- 4/5	2/5
2	5/7	- 5/9	= A2 / B4
3	-1 1/8	3/5	
4	- 2/3	7/12	
5			

SUM fx =A4*B1

	A	B	C
1	2/3	- 4/5	2/5
2	5/7	- 5/9	1 11/49
3	-1 1/8	3/5	=A4*B1
4	- 2/3	7/12	
5			

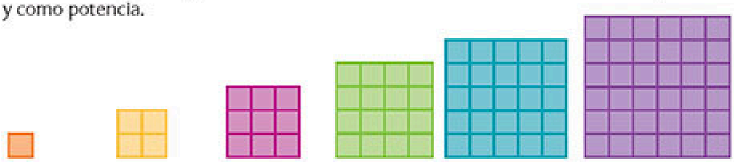
L10 Raíz cuadrada

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Área de cuadrados

Analiza las siguientes figuras. Después, realiza lo que se pide.

1. Escribe el área de los siguientes cuadrados de dos formas diferentes: como multiplicación y como potencia.



2. Completa las siguientes expresiones.
   a) Si los lados de un cuadrado miden una unidad de longitud, el área del cuadrado es igual a ______________________ o ______________________ .
   b) Si los lados de un cuadrado miden dos unidades de longitud, el área del cuadrado es igual a ______________________ o ______________________ .
   c) Si los lados de un cuadrado miden tres unidades de longitud, el área del cuadrado es igual a ______________________ o ______________________ .

También puedes plantear la medida del área de cuadrados para determinar el valor de sus lados.

   d) Si el área de un cuadrado mide 16 unidades cuadradas, sus lados miden ___ unidades.
   e) Si el área de un cuadrado mide 36 unidades cuadradas, sus lados miden ___ unidades.
   f) Si el área de un cuadrado mide 81 unidades cuadradas, sus lados miden ___ unidades.

3. Compara tus respuestas con las de otro compañero. Discutan sobre las estrategias que permiten calcular la medida de los lados de un cuadrado a partir de la medida de su área. Escriban sus acuerdos.

____

____

Aprende y aplica

SIGAMOS ADELANTE

La raíz cuadrada

Resuelve junto con un compañero.

1. Un cuadrado tiene un área de 49 u^2, como el que se muestra.
   a) ¿Cuánto deben medir sus lados para que esa sea la media de su área? ¿Por qué?
   ____
   b) ¿Cómo pueden determinar la medida de los lados de un cuadrado cuando conoces la medida de su área? ______________________________
   ____
   c) Las medidas de un cuadrado de área igual a 35 u^2, ¿serán un número exacto? ¿Por qué?
   ____

Área del cuadrado = 49

2. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Después, lean juntos la siguiente información.

APRENDEMOS

- Cuando tienes un número que representa la medida del área de un cuadrado y, a partir de ésta, calculas la longitud del lado del cuadrado, se dice que esta longitud es la raíz cuadrada del número que representa el área.
- La raíz cuadrada está ligada a cuadrados como los que aparecen en la página anterior, desde los pitagóricos se volvieron importantes:
- La medida de los lados de cada cuadrado se calcula con la **raíz cuadrada** de su área y su símbolo es: $\sqrt{\square}$ se usa para indicar la raíz cuadrada **positiva** de un número.
- Por ejemplo, un cuadrado de lado 7 tiene un área: $7^2 = 49$ y, los lados de ese cuadrado tienen una longitud igual a la raíz cuadrada de 49, es decir, $\sqrt{49} = 7$.

Cuadrados perfectos

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

Los números cuadrados perfectos son aquellos que poseen raíces cuadradas exactas.

1. Completen la siguiente tabla a partir de la información anterior.

Número	Cuadrado del número	Raíz cuadrada del cuadrado del número
12		
25		
60		
100		

   a) ¿Cuánto es el resultado de $-8 \times (-8)$? ______________________________
   b) ¿Qué números son raíz cuadrada de 64? ______________________________
   c) ¿Cuántas raíces cuadradas tiene un número y qué tipo de números son?
   ____
   d) ¿Qué números son raíz cuadrada de 81? ______________________________

2. Lean la información y respondan lo que se pide.

a) Si 4^2 es $(4)(4) = 16$, entonces la raíz cuadra de 16 es 4, ¿qué sucede con $(-4)^2$?

____

b) ¿El número -4 también puede ser la raíz cuadrada de 16? Explica por qué.

____

c) Si a es la raíz cuadra de b, ¿también $-a$ será raíz cuadrada de b? Argumenten su respuesta. ______________________________

d) Si $\sqrt{4}$ = _____ porque 2^2 = _____, ¿qué otro número elevado al cuadrado es igual a 4?

____

e) Si 2 es la raíz positiva de 4, ¿qué número es su raíz negativa? ¿Por qué?

____

f) Para indicar las dos raíces en una sola expresión se acostumbra usar el símbolo ±.

Escriban las dos raíces cuadradas de 4 con una sola expresión: $\sqrt{4}$ = ______________

g) ¿Cuáles son las raíces cuadradas de 81? ______________________________

h) ¿El número 74 tendrá raíces cuadradas enteras? ¿Por qué? Argumenta frente al grupo.

3. Escriban los cuadrados de los siguientes números.

Número	4	9	11	26	45	62	110
Cuadrado del número							

4. Calculen las raíces cuadradas de los siguientes números.

Número	81	144	256	900	2 025	12 100
Raíz positiva del número						
Raíz negativa del número						

5. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Discutan sobre la relación que hay entre los números elevados al cuadrado y la raíz cuadrada correspondiente. ¿Por qué se pueden considerar como operaciones inversas? Registren sus acuerdos en el cuaderno con el apoyo del profesor.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente información. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero dice que $\sqrt{-4}$ es 2, ¿qué le dirías?
2. Si un amigo te dice que es posible extraer la raíz cuadrada de un número negativo, ¿qué le dirías?
3. Si un amigo te dice que $16 + 25 = 41$ es lo mismo que $4^2 + 5^2 = 41$, entonces la raíz cuadrada de 41 es igual a 9: $(\sqrt{16 + 25}) = \sqrt{4^2 + 5^2} = 9$); ¿qué le dirías?

Apóyate con una calculadora para corroborar tus afirmaciones.

Aproximación de raíces cuadradas

En equipo, resuelvan las siguientes actividades a partir de la siguiente información.
Cuando un número no es un cuadrado perfecto al calcular su raíz cuadrada obtenemos una aproximación. Por ejemplo una aproximación a la raíz cuadrada de 15 es 3.8, ya que $3.8 \times 3.8 = 14.44$.

1. Busquen una forma de encontrar un número con dos cifras decimales que se aproxime a la raíz cuadrada de 15.
   a) ¿Qué número encontraron? Justifiquen su resultado.

   ___

   ___

   b) Si agregan una cifra decimal a su aproximación, ¿entre qué números decimales se encontraría? Expliquen su respuesta.

   ___

   ___

Glosario

Radicando. Número o valor al que se le quiere calcular su raíz.

2. Escriban entre qué números, con dos cifras decimales, se encuentra la raíz cuadrada de los siguientes números.

   a) $\sqrt{124}$ ___ b) $\sqrt{72}$ ___

   c) $\sqrt{39}$ ___ d) $\sqrt{186}$ ___

3. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros compañeros. Juntos registren en su cuaderno un método para encontrar una aproximación a la raíz cuadrada de números que no son cuadrados perfectos.

4. Calculen con su método una aproximación a las raíces cuadradas siguientes:

   a) $\sqrt{29} \approx$ ☐ b) $\sqrt{45} \approx$ ☐ c) $\sqrt{60} \approx$ ☐

5. También pueden aproximar el valor de las raíces cuadradas por ensayo. Calculen el cuadrado de los siguientes números y rodeen la mejor aproximación a las raíces cuadradas. Observen los ejemplos. Pueden usar la calculadora.

   a) $\sqrt{2} \approx$ ___ $1.1^2 = 1.21$ $1.2^2 = 1.44$ $1.3^2 = 1.69$ $1.4^2 =$ ___ $1.5^2 =$ ___

   b) $\sqrt{3} \approx$ ___ $1.1^2 =$ ___

   c) $\sqrt{5} \approx$ ___ $2.1^2 =$ ___

   d) $\sqrt{17} \approx$ ___ $4.1^2 =$ ___

   e) $\sqrt{29} \approx$ ___ $5.1^2 =$ ___

6. Siguiendo la idea de la actividad anterior, pueden encontrar aproximaciones de raíces cuadradas con dos o tres cifras decimales y completar la siguiente tabla.

	Aproximación a:			
	Entero	Décimos	Centésimos	Milésimos
$\sqrt{3}$				
$\sqrt{5}$				
$\sqrt{17}$				
$\sqrt{29}$				

7. Comparen los resultados que obtuvieron con ambos procedimientos con otros compañeros. ¿Cuál les parece más acertado y sencillo? Utilicen su calculadora para validar los resultados.

Otros procedimientos

En pareja, lean la información. Después, resuelvan las actividades.

1. Cuando los números no son cuadrados perfectos, entonces su raíz cuadrada no es entera, y tiene cifras decimales.
Los babilonios tenían un procedimiento muy ingenioso para calcular raíces cuadradas, por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 94, buscaban un cuadrado cuya área fuera igual a 94. Esto se logra transformando un rectángulo, como muestra la secuencia de figuras.

1. Observen la secuencia de imágenes y respondan las preguntas.
Un lado del primer rectángulo mide 9, que es el número entero que más se acerca a la raíz cuadrada de 94.

a) ¿Cuál debe ser el valor del otro lado del rectángulo 1 para que el área sea 94? ________
Después, los babilonios calculaban el promedio de las medidas del primer rectángulo, cuyo resultado representa uno de los lados del segundo rectángulo de área 94.

b) Calculen las medidas del segundo rectángulo, ¿cuánto mide el lado del rectángulo 2 que representa la media de los lados anteriores? ________________

c) ¿Cuánto tiene que medir el otro lado para conservar el área de 94? ____________

Después, se procede de la misma forma hasta encontrar la medida de los lados del rectángulo 3 que tengan las mismas longitudes, es decir, las medidas de un cuadrado.

d) ¿Cuáles serían las medidas del cuadrado de la tercera figura, es decir, una aproximación a $\sqrt{94}$? ¿Cómo obtuvieron los valores? ______________________

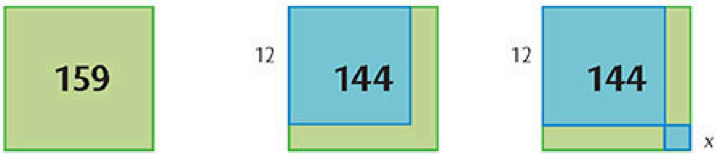
____

2. Utilicen el mismo método para aproximar las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{44} \approx$ ______ b) $\sqrt{86} \approx$ ______ c) $\sqrt{114} \approx$ ______ d) $\sqrt{126} \approx$ ______

3. Por medio de ecuaciones de primero grado se pueden obtener aproximaciones a una raíz cuadrada. Observen el siguiente ejemplo.

- Para calcular la raíz cuadrada de 159, se construye un cuadrado y se le asigna un área con esa cantidad, es decir, 159.
- Después, se busca el cuadrado perfecto que más se acerque a 159 y se divide para formar el nuevo cuadrado, como muestra la segunda figura.
- El área que "sobra" se divide en dos rectángulos y un cuadrado con lados desconocidos, que llamaremos x, como pueden ver en la tercera figura.



Así, el cuadrado original es igual a un cuadrado de área 144, dos rectángulos de lados 12 y x, es decir, su área es igual a 12x; además de un cuadrado de lados igual a x.

Como el cuadrado que vale x tiene un área muy pequeña se puede despreciar, es decir, omitirse para calcular el valor aproximado de la raíz de 159. Así se obtiene la ecuación:

$$144 + 24x = 159$$

a) Resuelvan la ecuación: ______________________

b) Así, la raíz cuadrada de 159 será aproximadamente: 12 + ________ = ________ .

4. Calculen las siguientes raíces cuadradas con este método. Realicen los pasos en su cuaderno.

a) $\sqrt{123} \approx$ ______ b) $\sqrt{176} \approx$ ______ c) $\sqrt{194} \approx$ ______ d) $\sqrt{216} \approx$ ______

5. Comenten en grupo sus resultados y procedimientos. Discutan sobre el método que les parece más eficiente para calcular aproximaciones de raíces cuadradas cuyos números no son cuadrados perfectos. ¿Se les ocurre algún otro? Registren sus acuerdos. ______________

____

CONCLUIMOS **Crea y evalúate**

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Completa las siguientes expresiones sin hacer operaciones escritas.
   a) Si el área de un cuadrado es $9^2 = 81$, entonces, la raíz cuadrada de 81, es: ________ .
   b) Si el área de un cuadrado es $13^2 = 169$, entonces, la raíz cuadrada de 169, es: _____ .
   c) Como $\sqrt{1\,024} = 32$, entonces $32^2 =$ ____________________
   d) Como $\sqrt{2\,304} = 48$, entonces $48^2 =$ ____________________

2. Resuelve lo que se pide.
   a) El cuadrado de un número positivo a es b: si $a^2 = b$, el resultado de $(-a)^2$ es. ________ .
   b) Si la raíz cuadrada negativa de un número es −105, ¿de qué número se trata? ________
   c) Si se desea bardear con una cerca un terreno cuadrado de 3 136 m^2 de área, ¿cuántos metros de cerca deben comprarse? ____________________
   d) Se tiene un terreno cuadrado de 20 m de lado que va a emplearse para sembrar ciertos vegetales, ¿cuánto terreno se sembrará? ____________________

3. Un arquitecto recibió unos planos donde faltan algunos números. Ayúdale a obtenerlos.

   a) $\sqrt{\_\ 7} \approx 6.86$ b) $\sqrt{5\ \_\ 7} \approx 23.85$ c) $\sqrt{1\,3\ \_\ 9} \approx 37.13$

4. Encuentra la longitud de los lados de los cuadrados cuya área se indica.

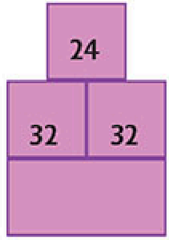
   a) 19 cm^2: ________ b) 73 cm^2: ________ c) 127 cm^2: ________ d) 243 cm^2: ________

5. Juan comentó en la clase de matemáticas que la raíz cuadrada de 9 es 3, y que análogamente, la raíz cuadrada de 0.9 es 0.3.
   ¿Estas de cuerdo con la afirmación de Juan? Explica tu respuesta. ____________

6. Encuentra una aproximación de la longitud de los lados de los cuadrados cuyas áreas son las siguientes:
   a) 0.5 m^2 __________ b) 0.7 m^2 __________ c) 0.25 m^2 __________

7. Responde.
   a) En números mayores que 1, ¿su raíz cuadrada siempre será menor que el radicando?
   Explica tu respuesta. ____________________
   b) ¿Qué sucede con la raíz cuadrada de números mayores que cero y menores que 1?
   ____
   c) ¿Cuáles son los únicos números cuya raíz es igual que su radicando?
   ____

8. Se quiere realizar un diseño como el siguiente: tres cuadrados, cuyas áreas son las que se indican, y un rectángulo que tiene la misma altura de los cuadrados que tiene encima.



a) ¿Qué dimensiones deben tener los cuadrados?

____

b) ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo?

____

9. Supón que estás trabajando de arqueólogo y tienes que explicar cómo los babilonios calcularon raíces cuadras de 87 y 146, explica paso a paso lo que debieron hacer.

a) $\sqrt{87} \approx$ ________ b) $\sqrt{146} \approx$ ________

10. Para realizar el avalúo de algunos terrenos de forma cuadrada con área de 37 m^2 y 104 m^2 debemos saber la media de cada uno de sus lados. Obtén una aproximación de la medida de cada lado hasta centésimos.

a) 37^2 ________ b) 104^2 ________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En una hoja de cálculo electrónica puedes desarrollar números al cuadrado y raíces cuadradas para ver la relación entre dichas operaciones.
   a) En una hoja de cálculo diseña una forma de utilizar el método babilónico para aproximar raíces.
   b) También diseña una forma de aproximar raíces, usando el recubrimiento del área de un cuadrado.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Números	Cuadrados	Raíz cuadrada del cuadrado	Simétricos	Cuadrados	Raíz cuadrada del cuadrado	
2	3	9	3	−3	9	3	3.2
3	56	3136	56	−56	3136	56	
4	79	6241	79	−79	6241	79	
5	3987	15896169	3987	−3987	15896169	3987	
6	557689	3.1102E+11	557689	−557689	3.1102E+11	557689	
7							
8							

2. Utiliza una calculadora para calcular aproximaciones a la parte entera y decimal de un número. Explica cómo determinas la parte entera de la raíz cuadrada y cómo se determinan cada una de las partes decimales hasta milésimos.

L11 Repartos proporcionales

COMENZAMOS

Reflexiona y discute

Como cooperas, te toca

Lee la situación y resuelve lo que se pide.

1. Tres amigos compraron un automóvil clásico para arreglarlo y después venderlo. Para comprar el automóvil, Pedro dio $12 000, Juan $35 000 y Jacinto $8 000. Para repararlo, los tres trabajaron al mismo ritmo y vendieron el automóvil en $132 300.

   a) ¿Cuánto pagaron por el automóvil? ______

   b) Jacinto les propuso dividir entre tres lo que se obtuvo por la venta del coche. ¿Cuánto recibiría cada uno en este caso? ______

   c) ¿Todos ganaron?, ¿les tocó más de lo que aportaron? ______

   d) ¿Sería justo ese reparto? Explica tu respuesta.

   ______

   Pedro les propuso dividir la ganancia por la venta de la siguiente manera: se divide en seis partes, el que dio más se lleva $\frac{3}{6}$ partes; el que le sigue, $\frac{2}{6}$; y quien dio menos se lleva $\frac{1}{6}$.

   e) De acuerdo con Pedro. Escribe cuánto recibiría cada uno.

   Jacinto ______ Pedro: ______ Juan: ______

   f) ¿Sería justo ese reparto? Explica por qué.

   ______

2. Finalmente, Jacinto les propuso dividir la venta del coche de acuerdo con lo que puso cada uno para comprarlo.

   a) De acuerdo con lo anterior, ¿cómo puedes determinar cuánto le corresponde a cada uno? ______

   b) ¿Sería justo ese reparto? Explica tu respuesta. ______

   ______

   c) ¿Cuánto dinero recibiría cada uno?

   ______

3. Comenta tus resultados con los de otro compañero. Comenten las propuestas de los tres amigos. ¿Cuál es la mejor propuesta? Discutan lo anterior en busca de acuerdos.

En partes proporcionales

En pareja, resuelvan los siguientes problemas.

1. Un equipo de basquetbol ganó un torneo y recibió un premio de $1 000.00.

   a) ¿Cómo consideran que deben repartir el premio? ______

   b) ¿Sería justo que a unos les tocará más que a otros? ______

2. Para comprar una bolsa de 120 dulces que cuesta $40, Pablo aportó $10 y Diego $30.

   a) ¿Cómo deben repartirse los dulces? ______

   b) ¿Qué diferencia observan entre los dos problemas anteriores? ______

3. Tres pintores van a pintar tres bardas y entre los tres pagarán el costo de la pintura que es de $1 200. José utilizará la mitad de la pintura, Patricia la tercera parte y Felipe la sexta parte. ¿Cuánto deberá pagar cada uno por la pintura?

   a) José: ______ b) Patricia: ______ c) Felipe: ______
   d) Expliquen cómo obtuvieron las respuestas.

   ______

4. En una pensión de animales repartirán 70 kg de alimento entre tres perros de acuerdo con el peso de cada uno.
   a) Si los perros pesan 20 kg, 10 kg y 5 kg, ¿qué parte del alimento le corresponde a cada uno? Justifiquen su respuesta. ______

   b) ¿Cuántos kilogramos le corresponden a cada perro? ______

5. Una persona contrata un servicio para traducir un texto, por el que le van a cobrar $5 000, pero por el tiempo, el trabajo lo harán cuatro personas. El traductor A, trabajó 6 horas; el B, 4 horas; el C, 8 horas y el D, 12 horas. Consideren que todos trabajaron al mismo ritmo.

   a) ¿Qué parte del texto tradujo cada persona? ______

   b) De acuerdo con lo anterior, ¿cuánto debe cobrar cada uno? ______

   ______

6. Comparen sus respuestas con la de otra pareja. ¿Qué similitud hay entre los problemas? ¿Qué tipo de relación hay entre los datos de cada problema y la manera de realizar el reparto correspondiente? Discutan lo anterior y registren sus acuerdos en su cuaderno.

Repartos justos

En equipo, analicen los siguientes problemas y resuélvanlos.

1. Cinco amigos acordaron comprar un equipo de sonido para rentarlo para fiestas. Uno puso una parte del costo del equipo; otro, el doble que el anterior; otro, tres veces lo que puso el primero; otro de los amigos, cinco veces lo que puso el primero; y finalmente, el último siete veces lo que puso el primero.
   a) Si el equipo de sonido costó \$54 000, ¿cuánto puso cada uno para realizar la compra?

   ____

   b) ¿Cómo obtuvieron las respuestas?

   ____

2. Para instalar un juego en una feria, Juan puso \$4 000 y Pedro \$6 000. Las ganancias que se obtengan las repartirán de acuerdo con lo que cada uno aportó.
   a) Si en un día de feria ganaron \$1 500, ¿cuál de los siguientes repartos es proporcional a lo que aportaron Juan y Pedro? ______________________________

   Reparto 1: Juan, \$750.00 y Pedro, \$750
   Reparto 2: Juan, \$600 y Pedro, \$900
   Reparto 3: Juan, \$500 y Pedro, \$1 000

   b) Expliquen su respuesta: ______________________________
   c) Consideren que la ganancia por día es la misma y calculen el monto que le toca a Pedro después de un mes de trabajo (30 días). ______________________________
   d) ¿Cómo se puede calcular lo que gana Juan en cualquier número de meses? __________

   ____

3. Completen la tabla a partir de la información anterior. Consideren meses de 30 días.

Tiempo	Ingreso total (\$)	Ingreso de Pedro (\$)	Ingreso de Juan (\$)
Dos meses			
Dos meses y medio			
Tres años			
Cuatro años			

   a) ¿Cómo se calcula el monto de ganancia que le corresponde a cada uno, dependiendo del número de meses transcurridos? ______________________________

   ____

4. Ahora, consideren que Juan y Pedro invitaron a Felipe a invertir en un nuevo juego. En esta ocasión, Felipe aportó $10 000; Juan, $4 000 y Pedro, $6 000, para instalar el juego. Obtienen ganancias promedio de $50 000 mensuales con este nuevo juego.

a) Completen la tabla a partir de la información anterior, consideren que las ganancias las repartan de manera proporcional a lo que cada uno aportó.

Tiempo	Ingreso total ($)	Ganancia de Pedro ($)	Ganancia de Juan ($)	Ganancia de Felipe ($)
Un año				
Dos años y medio				
Tres años años				
Cuatro años y tres meses				

b) Escriban con una fracción la parte del total del dinero que le corresponde a cada uno.

Juan = ☐ Pedro = ☐ Felipe = ☐

c) ¿Las cantidades de la tabla representan estas fracciones del ingreso total?

5. Validen sus respuestas con las de otro equipo. Comenten sobre las estrategias que se pueden utilizar para resolver problemas en los que el reparto resulte justo para quienes participan en él. Escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

6. Plateen un problema similar donde se consideren seis partes a repartir en diferente proporción y que se refiera a una situación diferente de las que se han trabajado en la lección. Validen su trabajo con ayuda del profesor.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente información. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un estudiante dice que el reparto proporcional es cuando a todos se les da la misma parte, ¿qué le dirías?
2. ¿Habrá un reparto proporcional en el cual se den partes iguales?, ¿en qué situación sería posible?

Tablas de reparto proporcional

En pareja, analicen la relación que tienen las siguientes situaciones y resuélvanlas. Discutan las estrategias previo a completar las tablas.

1. Se van a repartir 1 400 unidades de cierto producto entre tres participantes. Uno tendrá dos partes del total; otro, tres partes; y uno más, cinco partes. Completen la tabla.

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1	2	
2	3	
3	5	
Total		1 400

2. Consideren la siguiente forma de repartir las unidades y completen la tabla.

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1	1	
2	2	
3	2	
Total		2 300

3. Consideren esta nueva información y completen la siguiente tabla.

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1	3	
2	5	
3	7	
Total		12 000

4. Comenten sus estrategias con las de otros equipos. ¿Es posible utilizar la regla de tres para calcular valores de reparto proporcional? Si es así, escriban un ejemplo.

¿Es posible utilizar fracciones equivalentes para realizar el cálculo de valores en reparto proporcional? Si es así, escriban un ejemplo.

APRENDEMOS

Un **reparto proporcional** es aquel en el que una cantidad que está dividida en partes, se reparte en la misma proporción como partes de una segunda cantidad.

Una forma de hacerlo es obteniendo el valor unitario, esto es, se calcula cuánto corresponde a una unidad, y las razones que resulten se toman de referencia de acuerdo con una segunda cantidad.

Por ejemplo, si se quieren repartir 500 unidades en 2, 3 y 5 partes, respectivamente, se divide $500 \div (2 + 3 + 5) = 500 \div 10 = 50$, entonces 50 le corresponde a cada unidad, es decir, este valor se multiplica por las partes correspondientes.

TAREA

Completa las siguientes tablas de manera que los repartos resulten proporcionales.

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1	Una mitad	
2	Un tercio	
3	Un sexto	
Total		60 000

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1	12 000	
2	4 000	
3	8 000	
4	16 000	
Total		80 000

Participante	Partes por cada participante	Unidades que le corresponden a cada participante
1		5 560
2		16 680
3		11 120
4		22 240
Total		

CONCLUIMOS

Crea y evalúate

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Gabriel, Raúl y Alberto son hermanos y sus familias tienen 4, 7 y 3 integrantes, respectivamente. Harán una fiesta de fin de año y pagarán los gastos según el número de integrantes de cada familia. ¿Cuánto debe pagar cada hermano?
   a) Si el total de gastos fue $2 646 y se reparte de manera equitativa entre todos los asistentes a la fiesta, ¿cuánto debería pagar cada persona? ____________
   b) ¿Cómo usarías el resultado del inciso anterior para saber cuánto debe pagar cada hermano? ____________
   c) ¿Cuánto aportó cada uno? ____________

2. Supongamos que un jefe quiere entregar un apoyo económico para estudios a sus empleados cada mes de acuerdo con la edad que tienen. El hombre dispone de $4 500 por mes y los empleados tienen 23, 24 y 28 años.
   a) ¿Qué cantidad le corresponderá a cada uno? ____________

3. Tres personas quieren poner un negocio: María pone $5 000; Luis, $9 000; y Karen, $10 000. En seis meses, revisan cuentas y tienen ganancias por $250 000.
   a) Si reparten las ganancias proporcionalmente de acuerdo con la inversión de cada uno, ¿cuánto deben recibir? ____________

Tic

En la página de internet www.vitutor.com/di/p/ejercicios_reparto.html, puedes resolver problemas de reparto proporcional.

4. En una tienda departamental se requiere repartir $18 000 de bono por ventas entre el departamento de deportes, caballeros y damas. Las ventas del departamento de deportes fueron de $20 000; las de caballeros, de $40 000; y las de damas, de $60 000.
   a) Si el bono lo reparten de manera proporcional a las ventas de cada uno, ¿cuánto corresponde a cada departamento? ____________

   ____

5. Tres amigos compraron un boleto para un sorteo que tiene un premio de $1 000 000. Para comprar el boleto, uno de ellos aportó $120; otro, $80; y el tercero, $150.
   a) ¿Cuánto costó el boleto? ____________
   b) Si ganaran el premio, ¿cuánto dinero del premio le corresponde a cada uno de acuerdo con lo aportado? ____________

6. Otros tres amigos compraron un boleto para otro sorteo y ganaron $150 000.
   a) Si uno de ellos aportó la quinta parte del costo del boleto y los otros dos amigos el resto en partes iguales, ¿qué cantidad del premio le corresponde a cada uno? ______

   ______

7. Un padre le heredó 20 000 hectáreas de cultivo a sus tres hijos y las repartió de acuerdo con el número de nietos que le han dado: Juan tiene tres hijos, Carmen, uno; y Eduardo, dos.
   a) ¿Cuántas hectáreas recibirá cada hijo? ______

   ______

   b) Si, además, el padre les heredó $2 500 000 repartidos con el mismo criterio, ¿cuánto le corresponde a cada hijo? ______

   ______

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Trabaja en una hoja de cálculo electrónica para resolver problemas de reparto proporcional:
   a) Abre un archivo y coloca la información que muestra la imagen 1.

	A	B	C	D
1	Participantes	Partes por cada participante	Razón	Lo que debe corresponder a cada participante.
2	A	150		
3	B	400		
4	C	275		
5	D	625		
6	Total	1,450		16646

   b) Da formato de "Fracción" a las celdas de la columna C y escribe la fórmula: =B2/B6, para obtener las razones de las partes de cada uno entre el total de partes a repartir. Repite la fórmula en las otras celdas de la columna C, como muestra la imagen 2.
   c) Por útlimo, escribe las fórmula en las celdas de la columna 3, según la celda que corresponda: =B2*C2, para obtener las partes que le tocan a cada participante.

fx =B3/B6

B	C
Partes por cada participante	Razón
150	3/29
400	=B3/B6
275	
625	
1,450	

C	D
Razón	Lo que debe corresponder a cada participante.
3/29	1722
8/29	4592
11/58	=C4*D6
25/58	
	16646

2. Resuelve el siguiente problema en una hoja de cálculo electrónica.
   Un banco repartirá $1 200 000 entre tres clientes de acuerdo con el ahorro que han hecho en un año. El primero ahorró $16 000; el segundo, $19 500; y el tercero, $24 500.
   a) ¿Cuánto recibirá cada uno? ______

   ______

Eje: Número, álgebra y variación • Tema: Ecuaciones • Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

L12 Dos incógnitas, dos ecuaciones

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

La dinámica del cobro en taxis

Lee la siguiente información. Después, resuelve las actividades.

1. La compañía de renta de automóviles A cobra $100.00 por día, más $ 8.50 por cada kilómetro recorrido; mientras que la compañía B cobra $150.00 por día, más $ 5.50 por cada kilómetro recorrido.
   a) Si deseamos alquilar un automóvil para hacer un recorrido aproximado de 140 kilómetros, ¿qué compañía conviene escoger? ______
   b) Si representan con "x" los kilómetros recorridos y con "y" el total a pagar en cada compañía, escriban una expresión que presente el costo en cada caso por x kilómetros.
   Compañía A: ______ Compañía B: ______
   c) ¿Cómo pueden determinar en qué kilometraje el costo es el mismo en ambas compañías? ______
2. En una zona de la ciudad hay dos bases de taxis de sitio. Los taxis "Memo" cobran $8.00 de "banderazo" por atender una solicitud de servicio, más $1.25 por km recorrido; y los de la base "Toño" cobran $5.00 por atender un servicio, más $1.50 por km recorrido.
   a) Completa la siguiente tabla para conocer el costo de un viaje en los dos sitios.

Taxi / Distancia recorrida	Costo por kilómetros recorridos ($)							
	2 km	4 km	6 km	8 km	10 km	12 km	14 km	16 km
Memo								
Toño								

   b) Traza en el siguiente plano una gráfica donde se pueda analizar cómo se comporta el costo de un trayecto en cada sitio. Usa colores diferentes para cada gráfica.
   c) ¿En qué momento ambos sitios cobran lo mismo? ______
   d) ¿Cómo se refleja esto en las rectas? ______
3. Escribe una expresión algebraica para el costo de los recorridos de cada sitio.
   a) Taxis Memo: ______ b) Taxis Toño: ______
4. Si sustituyes a x en ambas expresiones por el valor que corresponde al punto donde se intersecan las rectas y despejas, ¿qué observas? ¿Habrá otro punto en alguna de las rectas que cumpla con lo anterior? Comenta lo anterior con otros compañeros y registren sus acuerdos en su cuaderno.

Aprende y aplica —

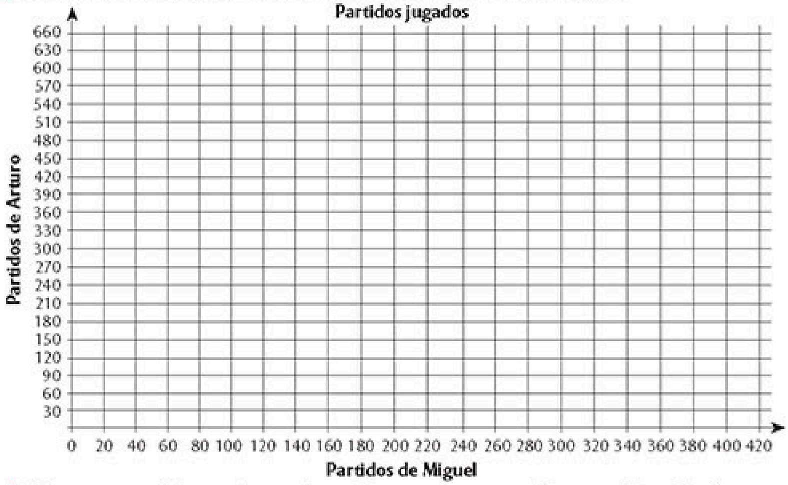
Puntos de intersección de dos rectas

En pareja, resuelvan los siguientes problemas.

1. Miguel y Arturo juegan futbol en el mismo equipo. Ambos han participado en 613 juegos, pero Miguel ha jugado 73 partidos más que Arturo.
   a) Completen la siguiente tabla; anoten en cuántos juegos participó Arturo cuando Miguel tenía los partidos que se muestran.

Jugador	Partidos jugados								
Miguel (x)	73	80	97	124	160	200	250	343	400
Arturo (y)									

   b) Construyan la gráfica a partir de los datos anteriores en el siguiente plano.



   c) Elaboren una tabla como la anterior en la que se muestre cuántos partidos debería jugar cada uno para sumar los 613 partidos. Por ejemplo, si Miguel hubiera jugado 440 partidos, entonces Arturo jugó 213; si Miguel jugó en 380, Arturo participó en 233, etcétera. Después, tracen la gráfica en el plano anterior.

   d) ¿En qué punto se cortan las dos rectas? ______________________________

   e) ¿Qué interpretación le dan al punto de intersección de las gráficas? ____________

   f) Escriban una expresión algebraica con dos incógnitas que represente los datos de la primera tabla; y otra para los datos de la segunda tabla, la del inciso c.

   Expresión 1: ____________________ Expresión 2: ____________________

   g) Si sustituyen a x y y por la coordenada del punto de intersección, ¿qué ocurre con los resultados de cada ecuación? ______________________________

   h) ¿Habrá otro punto sobre las rectas que cumpla lo mismo? ¿Cómo podrían resolver el problema a partir de las expresiones algebraicas? ______________________________

2. En una tienda de ropa se vendieron 332 camisas de manga corta y manga larga, de las cuales, el número de camisas de manga larga vendidas fue el triple que la venta de camisas de manga corta. ¿Cuántas camisas de cada tipo se vendieron?

a) Realicen una gráfica para cada una de las dos relaciones que se establecen.
- Camisas de manga corta vendidas + camisas de manga larga vendidas = 332
- Camisas de manga corta vendidas = triple de camisas de manga larga vendidas.

b) ¿Hay algún punto de las rectas que indique la solución del problema? Si lo hay, ¿cuál es? ______

c) Por ejemplo, si se venden 10 camisas de manga corta, ¿cuántas de manga larga se vendieron? ______ En este caso, ¿cuántas se vendieron en total? ______

d) Si se vendieron 24 camisas de manga larga, ¿cuántas de manga corta se vendieron? ______ ¿Cuál es el total de camisas vendidas? ______

e) Completen la siguiente tabla a partir de la información del problema.

Camisas vendidas								
Manga corta	34		65	83		90		117
Manga larga		120		249	198		213	
Total								

f) ¿Todas esas cantidades satisfacen que "se vendieron el triple de camisas de manga larga que de manga corta"? ______

g) ¿Qué cantidades de la tabla satisfacen las condiciones del problema? ______

______

Para resolver el problema de otra manera, deben plantearse dos ecuaciones. Dado que el total de camisas vendidas es 332, una de las ecuaciones debe servir para "adivinar", "estimar" o "calcular" las camisas de manga larga vendidas. Si x es el número de camisas de manga corta que se vendieron, y y es el número de camisas de manga larga vendidas, escriban una expresión algebraica que represente lo que se pide en cada caso.

h) El total de camisas que se vendieron: ____________________

i) La relación entre las camisas de manga corta y manga larga vendidas: ____________

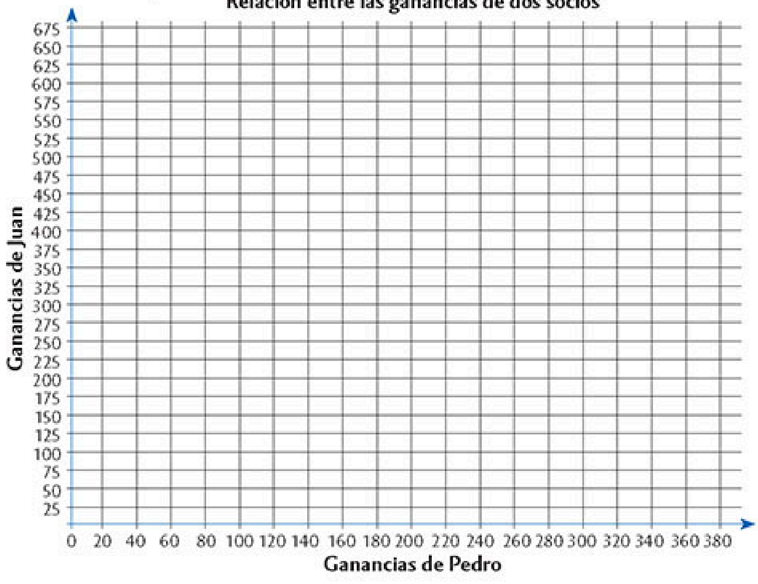
j) ¿Cómo utilizarían estas ecuaciones para resolver el problema? ____________

3. Pedro y Juan trabajan en un restaurante y hoy ganaron $633 de propina, pero Juan ganó $73 más que Pedro. ¿Cuánto ganó cada uno?

a) Elaboren en su cuaderno dos tablas, una que muestre la suma de las ganancias y otra para la diferencia de lo que cada uno ganó.

b) Tracen las gráficas en el siguiente plano; coloquen las ganancias de Pedro sobre *x* y las de Juan sobre *y*.

Relación entre las ganancias de dos socios



c) De acuerdo con la gráfica, ¿qué valores son la solución al problema? ____________

d) Escriban dos ecuaciones, es decir, dos expresiones algebraicas con dos incógnitas que te permitan mostrar la relación entre los datos del problema.

Suma de las ganancias: ____________ Diferencia: ____________

e) Traten de resolver el problema por medio de las ecuaciones.

4. Compartan sus respuestas con las de otra pareja. ¿En qué se parecen los problemas anteriores? ¿Qué relación hay entre los datos y las gráficas? Registren sus acuerdos sobre la forma de resolver problemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

____

APRENDEMOS

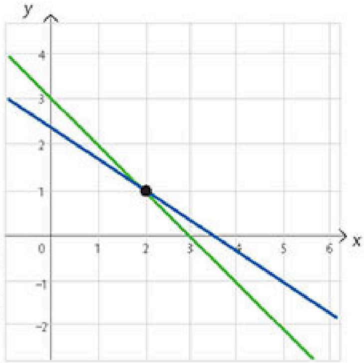
Los problemas anteriores que tienen dos incógnitas, que puede ser x y y, se pueden plantear y resolver con dos ecuaciones lineales. Se les conoce como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y se hace referencia a ellos como un sistema 2×2.

Dichos sistemas de ecuaciones se pueden presentar de diversas formas, los siguientes casos representan el mismo sistema de ecuaciones 2×2:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ 2x = 7 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - y \\ 3y = 7 - 2x \end{cases}$$



A partir de ellas, se pueden trazar las gráficas correspondientes con apoyo de las tablas de datos y hallando la solución del sistema, es decir, los valores de x y y que satisfacen ambas igualdades.

El punto donde las rectas se cortan indica la solución del sistema. Al sustituir los valores de x y y en las ecuaciones deben dar una igualdad en ambos casos. Por ejemplo, el punto de intersección de las rectas es $x = 2$; $y = 1$. Al sustituir las incógnitas por estos valores en las ecuaciones, tenemos que

$2 + 1 = 3$; $\qquad 2(2) + 3(1) = 4 + 3 = 7$.

Como puedes ver la igualdad se cumple en ambos casos; por tanto, $x = 2$ y $y = 1$ son la solución del sistema de ecuaciones.

TAREA

Analiza la información de cada problema; después, plantea el sistema de ecuaciones en cada caso y resuélvelos por el método gráfico.

1. En un grupo, hay 44 personas entre mujeres y hombres, pero hay 16 mujeres más.

   ¿Cuántas mujeres y cuántos varones hay en el grupo? ________________

2. La altura de un rectángulo mide 15 m menos que la base. Si su perímetro es igual a

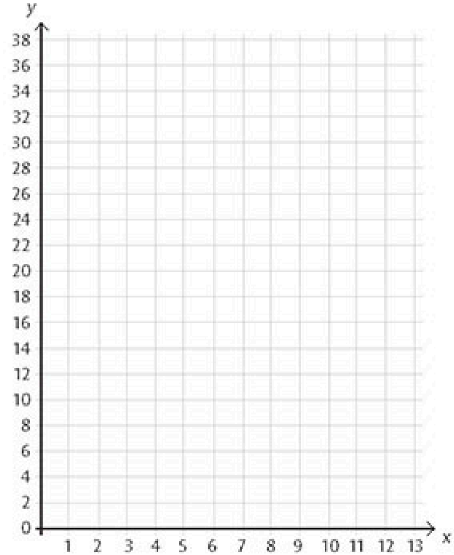
   138 m, ¿cuánto miden la base y la altura? ________________

3. Brenda compra en la papelería plumas a \$18 cada una. Después regresa y compra más plumas, pero se las dejan a \$17 cada una. Si en total compró diez plumas y gastó \$171, ¿cuántas plumas compró de cada precio?

   ____

Datos extraños, soluciones más extrañas

En pareja, resuelvan los siguientes problemas.



1. Dos números sumados dan como resultado 35 y al sumar el triple de uno más el triple del otro el resultado es 105. ¿Cuáles son esos números?
   a) Escriban el sistema de ecuaciones que represente el problema:

   ____

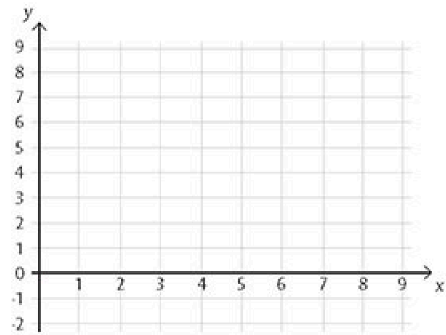
   b) Tracen en el siguiente plano las gráficas que representan a cada ecuación.
   c) ¿Cómo son las rectas de las gráficas?

   ____

   d) ¿Existe sólo un par de números que sumados den como resultado 35 y que el triple de uno más el triple de otro sea 105? Expliquen su respuesta.

   ____

   ____



2. Consideren la siguiente situación.
   Dos números sumados dan como resultado 5 y el doble de uno más el doble del otro da como resultado 15. ¿Cuáles son esos números?
   a) Escriban el sistema de ecuaciones que represente el problema.

   ____

   b) Tracen las gráficas correspondientes.
   c) ¿Qué observan en la gráfica? ______________
   d) ¿Cuál es la solución? ______________

   ____

   e) ¿Será posible que dos números sumados den como resultado 5 y después de sumar el doble de cada uno el resultado sea 15? ______________

   ____

Cuando al representar gráficamente un sistema de ecuaciones 2×2 las rectas coinciden en todos los puntos, es decir, son la misma recta; el sistema tiene infinidad de soluciones. Pero si las gráficas son dos rectas paralelas con diferente ordenada al origen, entonces el sistema no tiene solución, pues no habría coincidencia en ningún punto.

3. Tracen las gráficas de los siguientes problemas en su cuaderno y determinen si hay una sola solución, infinidad de soluciones o no hay soluciones.
   a) Si el doble de un número más el doble de otro número da como resultado 10 y si cinco veces cada número suman 20, ¿cuáles son esos números?

   ____

   b) Si el doble de un número más el doble de otro número da como resultado 10 y si cinco veces cada número suman 25, ¿cuáles son esos números?

   ____

   c) Si el doble de un número más otro número da como resultado 12 y si cuatro veces el primer número más el segundo número dan como resultado 22, ¿cuáles son esos números?

   ____

4. Compartan sus resultados con otras parejas. Si existen diferencias, compártanlas con el grupo con el fin de aclararlas.

Métodos diferentes, mismos resultados

En equipo, resuelvan los problemas siguiendo los procedimientos que se indican. Consideren la numeración de las ecuaciones para cada procedimiento.

Los hermanos Jim y Gaylord Perry fueron *pitchers* destacados de ligas mayores. Conjuntamente ganaron 529 juegos, pero Gaylord ganó 99 juegos más que Jim. Para saber cuántos juegos ganó cada uno, consideren los siguientes procedimientos.

1. Resuelvan el problema aritméticamente, realizando lo que se indica.
   a) Ambos ganaron 529 juegos, si quitas los 99 que ganó uno más que el otro, ¿cuántos partidos quedan? ______________________________
   b) De los partidos que quedaron cada uno ganó la mitad, entonces, ¿cuántos partidos ganó Jim y cuántos ganó Gaylord? ______________________________
   c) Tracen las gráficas correspondientes para comprobar la respuesta.

2. Resuelvan el mismo problema por medio del método llamado de igualación.
   a) Usando las ecuaciones 1 y 2, despejen G en la ecuación 1 para obtener una nueva ecuación. **Ecuación 4**: $G =$ ______________________________

   Con esto, tenemos dos ecuaciones en las que G está despejada (la 2 y la 4) y como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, esto conduce a la ecuación 5 con J como única incógnita:

   b) Escriban la **Ecuación 5** en términos de J: ______________ = ______________

   Nuevamente una situación de dos ecuaciones con dos incógnitas se redujo a una ecuación con una incógnita.

c) Despejen J de la ecuación 5 y encuentren su valor: ______

d) Calculen el valor de G usando la ecuación 4: ______

3. Resuelvan el mismo problema mediante el método llamado de sustitución.
   a) Si J representa los partidos que ganó Jim y G los que ganó Gaylord, escriban la ecuación

      que representa los 529 partidos que ganaron ambos. **Ecuación 1:** ______
   b) Escriban la ecuación que represente que Gaylord ganó 99 juegos más que Jim.

      Ecuación 2: ______

Si sabemos lo que vale G en la ecuación 2, podemos sustituirla en la ecuación 1, dado que tiene el mismo valor en ambas ecuaciones, así obtenemos una nueva ecuación, la 3.

   c) Completen la ecuación sustituyendo G. **Ecuación 3:** J + ______ = 529

De esta forma, un problema que estaba planteado con dos ecuaciones y dos incógnitas se ha transformado en un problema con una ecuación y una incógnita.

   d) Resuelvan la ecuación 3 para determinar el valor de J:

      ______

   e) Como ya tienen el valor de J, sustitúyanlo en la ecuación 2 para encontrar el valor de G.

      ______

   f) ¿Es el mismo resultado que obtuvieron antes? ______

4. Ahora, utilicen el método llamado de suma o resta y resuelvan el problema.
   a) Reescriban la ecuación 2 con las dos incógnitas del lado izquierdo de la igualdad:

   Ecuación 6: ______
   b) Coloquen las ecuaciones 1 y 6 una debajo de la otra para sumarlas o restarlas. Así eliminarán una incógnita y podrán calcular el valor de otra:

Ecuación 1:		Ecuación 1:	
Ecuación 6:	+ ______	Ecuación 6:	− ______
	G = ______		J = ______

Existen más métodos para resolver sistemas de ecuaciones 2×2, alguno puede resultarles más sencillo que otro, pero no siempre ese método es el más adecuado.

5. Comenten en grupo los procedimientos trabajados. ¿Cuál les parece más sencillo? ¿Cuál más complejo? Registra tu opinión en el siguiente espacio, que no necesariamente tiene que ser la misma que la de tus compañeros. Explica tu elección.

   ______

TAREA

Resuelve los siguientes problemas. Plantea el sistema de ecuaciones y resuélvelos mediante dos métodos, esto te puede ayudar a comprobar los resultados. Trata de utilizar todos los métodos vistos.

1. La suma de dos números es 9 y al restar el más grande al doble del más pequeño, el resultado es 3.

¿Cuáles son los números? ____________________

Sistema de ecuaciones: ____________________

2. Un paquete grande tiene 26 libros más que uno chico. En 5 paquetes grandes y 8 chicos hay 728 libros.

¿Cuántos libros hay en cada paquete? ____________________

Sistema de ecuaciones: ____________________

3. Si la suma de dos ángulos es 123° y su diferencia es de 15°, ¿cuánto mide cada ángulo?

____

Sistema de ecuaciones: ____________________

4. El triple de un número menos el doble de otro es igual a 3. El doble del primero menos el triple del segundo es igual a 7. ¿De qué números se trata? ____________________

Sistema de ecuaciones: ____________________

5. Una botella chica y una grande contienen juntas 9 litros de detergente líquido. Dos botellas grandes y seis chicas contienen 34 litros.

¿Cuántos litros caben en cada botella? ____________________

Sistema de ecuaciones: ____________________

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero te dice que la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 5y = 5 \end{cases}$ es $x = 0$ y $y = 0$, ¿qué le dirías?

2. Si un compañero te dice que la solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$ es $x = 0$ y $y = 0$, ¿qué le dirías?

APRENDEMOS

El tipo de problemas que has resuelto conducen a trabajar dos ecuaciones con dos incógnitas cada una. En el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas habrá dos soluciones, una para cada incógnita, esto difiere de las ecuaciones donde solamente hay una incógnita y una ecuación.

Las dos ecuaciones pueden ser de la forma: $ax + by = c$ y $dx + ey = f$, o pueden presentarse en la forma: $y = ax + b$; $y = cx + d$

Por ejemplo: $\begin{matrix} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 2x + y = 7 \\ 3x - y = 5 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} 2x + 8y = 18 \\ -3x - 4y = 14 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = x - 3 \\ y = 2x + 5 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = 5x + 8 \\ y = -4x + 4 \end{matrix}$

Puedes pasar de una forma a otra para escribir las ecuaciones, solamente despejando una de las incógnitas:

Por ejemplo: $\begin{matrix} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = -x + 8 \\ y = x - 4 \end{matrix}$ $\quad \Bigg| \quad \begin{matrix} 2x + 3y = 7 \\ -3x - 4y = 1 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \end{matrix}$

La letra que se utilice no cambia las relaciones entre las incógnitas.

Por ejemplo: $\begin{matrix} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} r + s = 8 \\ r - s = 4 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} P + Q = 8 \\ P - Q = 4 \end{matrix}$ son el mismo sistema de ecuaciones.

A un sistema de ecuaciones 2×2 también se le llama sistema de ecuaciones simultáneas 2×2 (aludiendo a que la solución del sistema satisface simultáneamente a las dos ecuaciones).

Al obtener la solución de un sistema de ecuaciones, por ejemplo: $x = 2$ y $y = 2$, cada expresión indica que estos valores son exclusivos para las dos ecuaciones en cuestión. Tanto x como y, en este caso, no se consideran variables, sino constantes.

Los métodos para solucionar dos ecuaciones con dos incógnitas son varios y no propician soluciones diferentes, ni saber un método implica conocer la solución, tampoco conocer un solo método asegura que se resolverán las ecuaciones correctamente.

La solución gráfica de un sistema de ecuaciones puede ser que no sea exacta, pues depende de la escala del plano cartesiano y los valores que se quieren representar.

Un sistema de ecuaciones se puede resolver aritméticamente, pero requiere de ensayar cifras o ver cómo se acomodan. Sin embargo, no siempre son evidentes los números que se acomodan.

Existen diferentes métodos algebraicos que permiten resolver sistemas de ecuaciones, los cuales se enumeran en la siguiente página.

APRENDEMOS

El **método por igualación** requiere despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar las expresiones que se obtienen en el despeje para obtener una ecuación con una variable y resolverla.

Considerando el sistema anterior, se despeja y en las dos ecuaciones (si se quiere despejar x, también es posible), se obtienen las siguientes expresiones:

$y = x - 1$ y $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, como dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, se obtiene la siguiente ecuación: $x - 1 = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Al resolver la ecuación, se obtiene que $x = \frac{8}{5}$. Después, se usa ese valor y se sustituye en cualquiera de los dos despejes de *y* anteriores y se obtiene su valor:

$$y = x - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

El **método por sustitución** implica despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra para obtener una ecuación es decir, una ecuación con una sola incógnita. Por ejemplo, consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{gathered} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{gathered}$$

- Despejar x en la segunda ecuación (parece más fácil): $x = 1 + y$; después se sustituye x en la otra ecuación: $2(1 + y) + 3y = 5$; lo que nos lleva a la ecuación de primer grado con una incógnita:

  $2 + 2y + 3y = 5$, al resolver la ecuación tenemos que: $y = \frac{3}{5}$.

- Como se sabe que $x = 1 + y$, se sustituye *y* por el valor obtenido en la ecuación anterior para obtener el valor de x:

  $x = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, así se obtienen las dos soluciones del sistema dado: $x = \frac{8}{5}$; $y = \frac{3}{5}$.

El **método de suma o resta** consiste en utilizar las dos expresiones para sumarlas o restarlas, término a término, a fin de cancelar alguna de las incógnitas; en algunos casos requiere hacer transformaciones de alguna de las ecuaciones, es decir, obtener una ecuación equivalente, como muestran los ejemplos. Después se resuelve.

Recuerda que dos ecuaciones son equivalentes si representan lo mismo y se pueden obtener multiplicando o dividiendo todos los términos por el mismo número:

$$3(x - y = 1) = 3x - 3y = 3$$

$$\begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ 3x - 3y = 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ + 3x - 3y = 3 \\ \hline 5x = 8 \end{array} \qquad x = \frac{8}{5}$$

$$\begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 2y = 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2x + 3y = 5 \\ -2x + 2y = -2 \\ \hline 5y = 3 \end{array} \qquad y = \frac{3}{5}$$

Los métodos algebraicos se aplican con criterios personales, no hay uno mejor que otro, sino el que más se acomoda a quien resuelve el sistema de ecuaciones 2 × 2.

Crea y evalúate

CONCLUIMOS

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Con alguna pequeña variante, retomemos el problema de Pedro y Juan. Los meseros ganaron en propinas \$302; si el doble de lo que ganó Pedro más el triple de lo que ganó Juan suma \$739, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

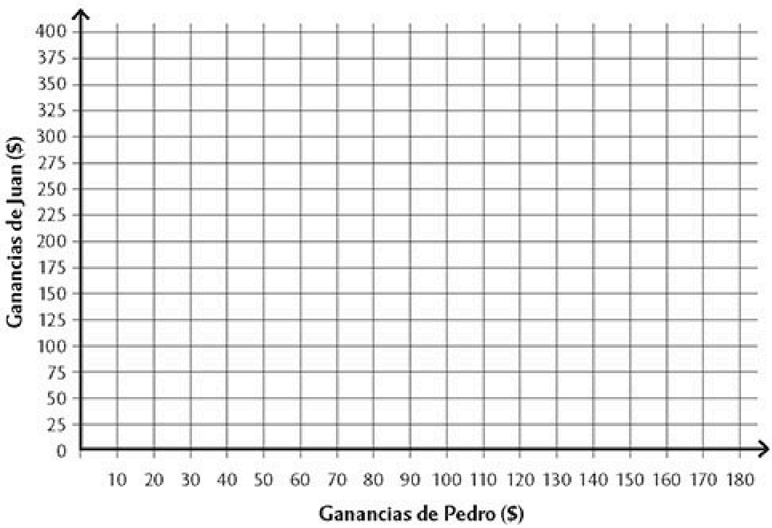
   a) Tabula algunos valores que representen la suma de ambos.

Ganancias de Pedro (x)							
Ganancias de Juan (y)							

   b) A partir de los datos anteriores, representa el doble de Pedro más el triple de Juan.

Ganancias de Pedro (\$)							
Ganancias de Juan (\$)							

   c) Construyan las gráficas que representen las relaciones que se indican.



   d) ¿Qué valores resuelven el problema? ______________________________

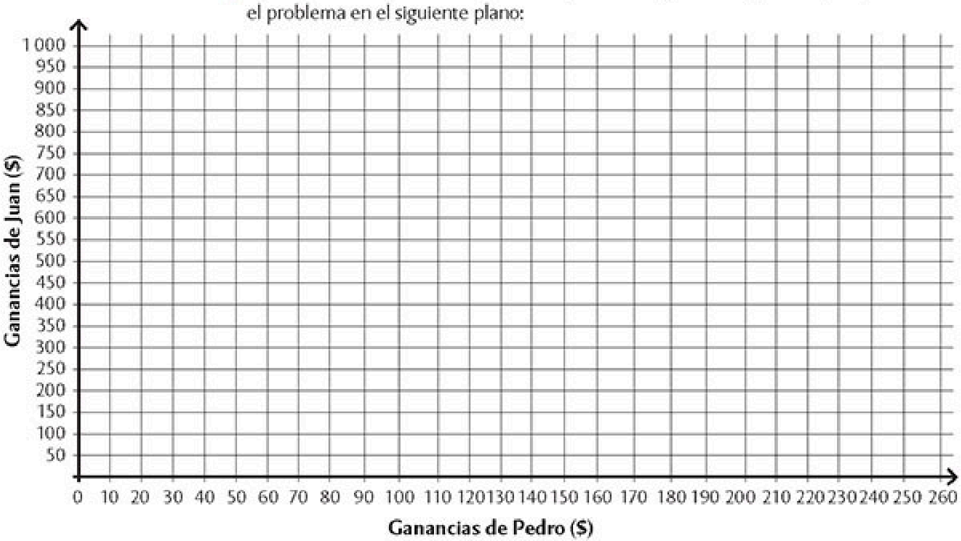
   e) Determina el sistema de ecuaciones que representa el problema.

      Ecuación 1: ____________________ Ecuación 2: ____________________

   f) Usa estas ecuaciones para resolver el problema algebraicamente.

2. Resuelve otra variante del mismo problema: Pedro y Juan obtuvieron \$943 en propinas. Al restar las propinas de Pedro a las de Juan, se obtiene \$515.

a) Elabora en tu cuaderno las tablas correspondientes y traza las gráficas que representan el problema en el siguiente plano:



b) ¿Cuánto le corresponde a cada uno? ______________________

c) Determina el sistema de ecuaciones para representar las relaciones entre los datos del problema: ______________________

d) Usa estas ecuaciones para resolver el problema y explica el procedimiento: ______________________

____

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

$$x + y = 3$$
$$x - y = 7$$

$x =$ ________ $y =$ ________

$$4x + y = 9$$
$$4x - y = 7$$

$x =$ ________ $y =$ ________

4. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de igualación. Compruébalo en las dos ecuaciones.

$$a + b = 18$$
$$a - b = 6$$

$a =$ ________ $b =$ ________

$$2r - 8s = -2$$
$$5r - s = 33$$

$r =$ ________ $s =$ ________

5. Comprueba si los valores dados a las incógnitas son las soluciones de los sistemas.

$$a + b = 16 \qquad a = 10$$
$$a - b = 4 \qquad b = 6$$

$$6x + 2y = 42 \qquad x = 5$$
$$2x + 2y = 22 \qquad y = 6$$

6. Plantea un problema que se resuelva con el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvelo.

$x + y = 98$
$x - y = 22$

$x =$ _______ $y =$ _______

____

7. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $2x + 3y = 15$; $4x + 6y = 30$, responde:

a) Por cualquier método, ¿tendrá una solución? ______________________

b) ¿Podrás encontrar, por lo menos, otras dos soluciones? ______________________

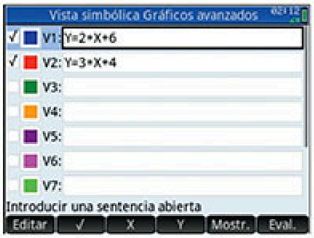
c) Grafica en tu cuaderno el sistema para validar tu respuesta.

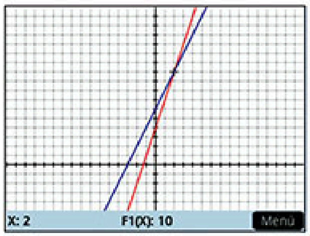
8. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$x = \dfrac{10 - y}{2}$ $\qquad$ $x = \dfrac{6 + y}{2}$

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Algunas calculadoras y software gratuito como Geogreba, Gaphmatica o Win plot tienen muchas herramientas que permiten resolver sistemas de ecuaciones 2×2.





Encuentra tres sistemas de ecuaciones que tengan como solución los valores 5 y −2, y comprueba tu solución con una calculadora.

Algunas calculadoras o software gratuito como Geogreba, Gaphmatica o Win plot permiten transitar entre diversas representaciones con facilidad: de la parte simbólica a la gráfica o a las tablas.

Busca un recurso en internet que te permita transitar de una representación a otra y encuentra las soluciones de sistemas de ecuaciones de manera gráfica y algebraica. Por ejemplo puedes descargar geogebra en: www.geogebra.org, otros puedes ubicarlos en algún navegador por su nombre.


Vista numérica Función

X	F1	F2
0	6	4
1	8	7
2	10	10
3	12	13
4	14	16
5	16	19
6	18	22
7	20	25
8	22	28
9	24	31

0

Zoom | Más | Ir a | Defn

Eje: Número, álgebra y variación • Tema: Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes • **Aprendizaje esperado:** Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).

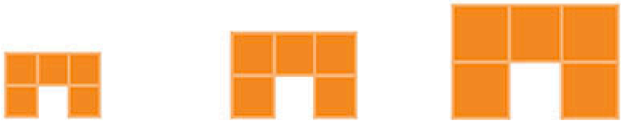
L13 Expresiones equivalentes

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Simplificación de modelos geométricos

Lee la información y analiza las figuras. Después, resuelve lo que se pide.

1. Un diseñador utilizó los siguientes modelos hechos con mosaicos cuadrados de distintos tamaños para decorar las diferentes entradas de una exposición.



El diseñador escribió las siguientes expresiones para facilitar el cálculo de las medidas de las construcciones: $12 \times l$ y $5 \times c$.

a) ¿Qué significa cada una de las expresiones? ______________________

____

b) ¿Cómo describirías con palabras la expresión: $P = 12 \times l$? ______________________

____

c) ¿Qué significado tiene: $A = 5 \times c$? ______________________

d) ¿Es lo mismo $12 \times l$, que $6 \times l + 6 \times l$, que $3 \times l + 4 \times l + 4 \times l + l$? ¿Por qué?

____

e) ¿Es igual escribir $A = 5 \times c$, que $A = c + c + c + c + c$, que $A = 2 \times c + c + 2 \times c$? ¿Por qué?

____

f) ¿Que relación hay entre l y c? ______________________

2. Considera el valor de l como $l = 2$, $l = 3.5$ y $l = 5.7$ y comprueba si las expresiones anteriores son equivalentes; después, calcula el perímetro de cada figura y anota los valores obtenidos en tu cuaderno.
3. En el recuadro de la derecha construye un diseño hecho con cuadrados que represente las siguientes expresiones algebraicas:

a) $P = 16 \times l$: ______________________

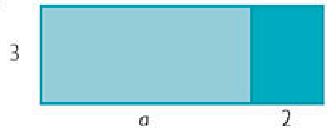
b) Si en las expresiones anteriores se usa una letra diferente, por ejemplo: $P = 16 \times s$, ¿cómo las interpretarías? ______________________

4. Compara tus composiciones con las de otro compañero y validen que todas sean correctas, aunque sean diferentes. Comenten las características que deben tener dos expresiones para ser equivalentes, es decir, para representar lo mismo.

Diferentes representaciones de lo mismo

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Analicen la siguiente figura y respondan.



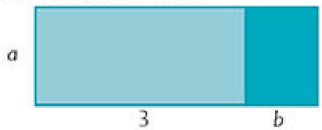
   a) Escriban una expresión algebraica que exprese el perímetro de la figura. __________

   b) Propongan una expresión que represente el cálculo del área de la figura. __________

   c) Al comparar sus expresiones con las de otros compañeros, es probable que sus expresiones sean diferentes, pero si sustituimos a la literal por un cierto valor numérico, ¿cómo debe ser el resultado al calcular el área y el perímetro? ¿Por qué? __________

   d) Prueben con $a = 2$, $a = 3.5$ y $a = 12$, ¿obtienen el mismo resultado en cada caso?

2. Consideren las medidas de la siguiente figura.



   a) Se propusieron las siguientes expresiones para calcular su área: $a(3 + b)$ y $a \times 3 + a \times b$, ¿cuál de las dos es correcta? Expliquen su respuesta. __________

   b) Se contemplaron las siguientes expresiones para calcular su perímetro. ¿Cuál es correcta?

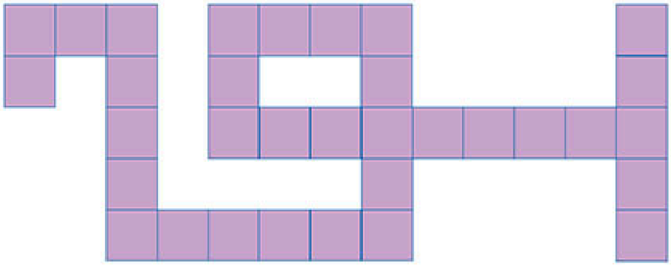
   $a + a + 3 + 3 + b + b$ $\quad$ $2 \times a + 2 \times 3 + 2 \times b$ $\quad$ $2(a + 3 + b)$ $\quad$ $2a + 6 + 2b$

   c) Si probamos las cuatro expresiones con los valores $a = 5$ y $b = 7$, ¿obtenemos el mismo resultado en cada caso? __________

   d) ¿Podemos considerar correctas las igualdades que aparecen abajo? ¿Por qué?

   - $a + a + 3 + 3 + b + b = 2a + 2 \times 3 + 2b$
   - $2(a + 3 + b) = 2a + 6 + 2b$
   - $2(a + 3 + b) = 2a + 2 \times 3 + 2b = 2a + 6 + 2b$

3. Establezcan expresiones algebraicas para calcular el perímetro de la siguiente figura, consideren *m* la medida del lado de cada cuadrado.



P = ____________________

a) Anoten de dos maneras distintas las mismas fórmulas.

Fórmulas del perímetro:

Expresión 1 = ____________________ Expresión 2 = ____________________

b) Determinen el perímetro de la figura si el lado *m* mide lo que se indica.

Medida del lado *m*	Perímetro (u)
3u	
5u	
8u	
9u	

4. Comparen sus respuestas con las de otros compañeros. Comenten sobre la manera de representar expresiones algebraicas de manera diferente y cómo comprobar que son equivalentes. Escriban sus acuerdos en el siguiente espacio.

____

____

APRENDE DE LOS ERRORES

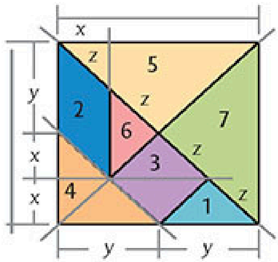
Analiza la siguiente situación. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Cuando se usan literales, el signo × puede omitirse para que no se confunda con la letra x. Si un compañero dice que la expresión $2 + 4 \times z$ es igual a $6z$, ¿qué le dirías?

Expresiones algebraicas con el tangram

En pareja, analicen las medidas del tangram y resuelvan las actividades.

1. Respondan las preguntas a partir de la relación entre las medida de las figuras que forman un tangram.



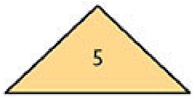
a) ¿Cuál es el perímetro del tangram? ______________________

____

2. Escriban el perímetro de cada pieza del tangram de dos maneras diferentes.

P = ______________________

P = ______________________



P = ______________________

P = ______________________

P = ______________________

P = ______________________

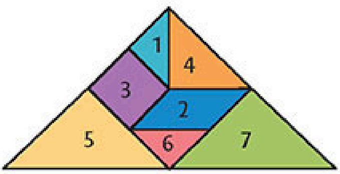
P = ______________________

P = ______________________

P = ______________________

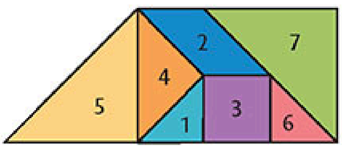
P = ______________________

3. Expresen algebraicamente el perímetro de las siguientes composiciones de dos maneras diferentes.



P = ______________________________

P = ______________________________



P = ______________________________

P = ______________________________

4. Comparen sus expresiones con las de otra pareja. Si existen diferencias, asignen diferentes valores a x, *y* y *z* y calculen perímetro de cada figura, utilizando todas las expresiones que escribieron para validar cuáles son correctas.

TAREA

Observa las figuras y resuelve las actividades.

1. Estas construcciones se hicieron con un rectángulo, cuyos lados miden 4 cm y 8 cm.

Figura A

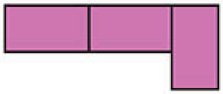


Figura B

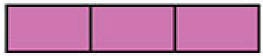
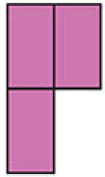


Figura C



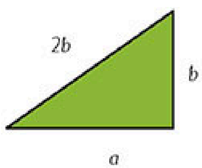
a) Escribe las operaciones y calcula el área y perímetro de las figuras A, B y C.

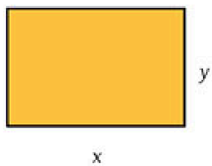
Figura / Propiedad	A	B	C
Perímetro (cm)			
Área (cm²)			

b) Expresa el perímetro y el área de cada figura. Representa la longitud de los lados de cada rectángulo con letras, por ejemplo: *a* y *b*.

Figura / Propiedad	A	B	C
Perímetro (cm)			
Área (cm²)			

2. Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes: una que represente el perímetro y otra que represente el área de cada una de las siguientes figuras:





P = ______________________ P = ______________________

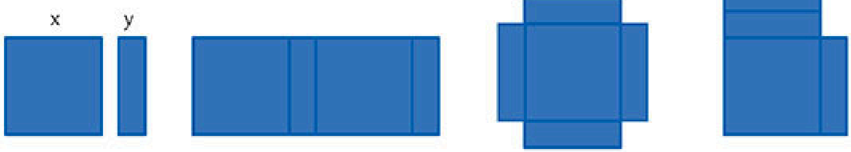
A = ______________________ A = ______________________

3. Compara tus respuestas con las de tus compañeros de grupo. Anoten en el pizarrón cada expresión de varias maneras distintas.

Composiciones geométricas

Analiza las siguientes figuras; después, resuelve las actividades.

1. Expresa el perímetro de las siguientes figuras, que fueron construidas con el cuadrado y el rectángulo cuyas medidas se muestran.



P = ____________ P = ____________ P = ____________

2. Dibuja los cuadrados y los rectángulos necesarios para representar geométricamente las expresiones algebraicas que corresponden al área o al perímetro de diferentes composiciones de figuras.

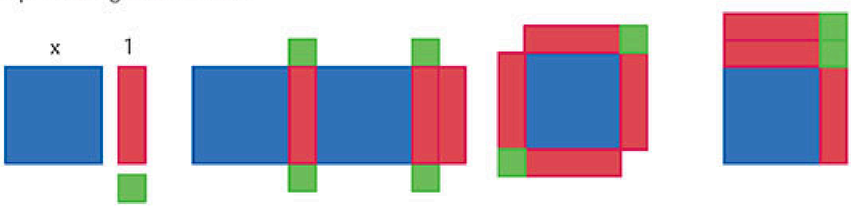
Perímetro
a) $2x + 6y$

Área
b) $(2x)(3y)$

Área
c) $3y + 2y$

Perímetro
d) $6x + 8y$

3. Encuentra expresiones que representen el perímetro de las siguientes figuras construidas a partir del siguiente modelo.



____________ ____________ ____________

4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Si existen dudas o diferencias, busquen la ayuda de otros compañeros para aclararlas.

APRENDEMOS

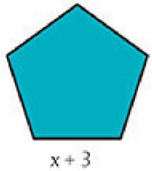
Las fórmulas para el área y perímetro de figuras geométricas pueden escribirse de muchas formas y son una manera de simplificar o resumir ideas importantes.

Por ejemplo, el perímetro de un cuadrado es la suma de las magnitudes de sus lados que es igual a multiplicar la magnitud por cuatro. El texto anterior se puede reemplazar por cualquiera de las siguientes **expresiones equivalentes**:

$$P = l + l + l + l = 4l \text{ o } F = s + s + s + s = 4s$$

Éstas son parejas de expresiones equivalentes, representadas con diferentes literales, donde P y F representan el perímetro y l y s, la longitud de los lados.

Dos expresiones algebraicas son equivalentes si al sustituir las literales involucradas obtenemos el mismo valor numérico, por ejemplo, el pentágono regular que se muestra.



Su perímetro puede ser:

$P = (x + 3) + (x + 3) + (x + 3) + (x + 3) + (x + 3)$; o también: $P = 5(x + 3)$.

Para comprobarlo, consideramos $x = 4$, tenemos que:

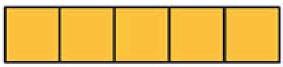
$P = (4 + 3) + (4 + 3) + (4 + 3) + (4 + 3) + (4 + 3) = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$

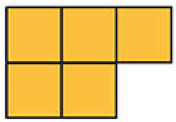
Y con la segunda expresión tenemos: $P = 5(4 + 3) = 5 \times 4 + 5 \times 3 = 20 + 15 = 35$

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

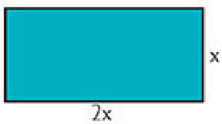
1. Representa el área y el perímetro de las figuras construidas con cuadrados mediante expresiones con literales que sean equivalentes.

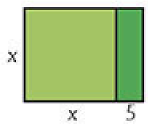




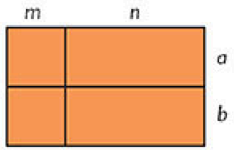
P = ______________________ P = ______________________

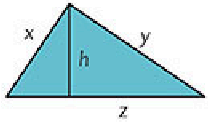
2. Escribe con dos expresiones algebraicas equivalentes el perímetro de las siguientes figuras:





P = ______________________ P = ______________________

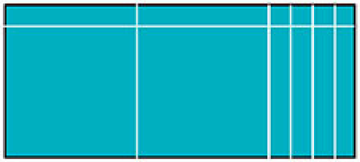




P = ______________________ P = ______________________

Comprueben que las expresiones algebraicas son equivalentes otorgando valores numéricos a las literales.

3. Expresa el perímetro de la figura mediante expresiones algebraicas equivalentes.



P = ______________________

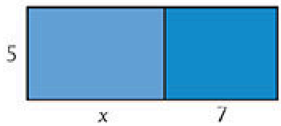
Considera lo siguiente: los cuadrados pequeños son la séptima parte de la de los grandes, es decir, los cuadrados de mayor tamaño son siete veces más grandes. Asignen valores a las medidas, considerando lo anterior, y calcula el perímetro de la figura.

P = ______________________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

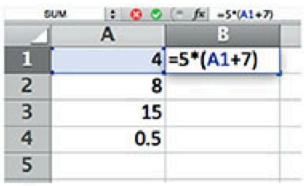
1. Abre un archivo en una hoja electrónica de cálculo para comprobar la equivalencia entre varias expresiones algebraicas equivalentes y para calcular el área y el perímetro de la siguiente figura.

Consideremos dos posibles expresiones para el cálculo del área de la siguiente figura.



a) Escribe de dos maneras diferentes el área de la figura:

____



	A	B
1	4	=5*(A1+7)
2	8	
3	15	
4	0.5	
5		

b) Anota en la celda A1 un valor para la literal (puedes agregar otros valores en celdas continuas de la misma columna A).

c) En la celda B1, anota la primera de tus expresiones, sustituyendo la literal por la celda A1, como se muestra. Después, da enter y arrastra el cursor hacia abajo para obtener el área considerando las otras medidas de la literal.

d) En la celda C1, anota la segunda expresión que escribiste y sigue los mismos pasos anteriores.

e) Agrega una tercera expresión y escríbela en la celda D1. Si tus expresiones son equivalentes, debes obtener los mismos resultados en ambas columnas, en las filas correspondientes.

Eje: Forma, espacio y medida • Tema: Magnitudes y medidas • Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

L14 Diferentes sistemas de medida

COMENZAMOS

Reflexiona y discute

En la tlapalería

Analiza la siguiente situación y realiza lo que se pide.

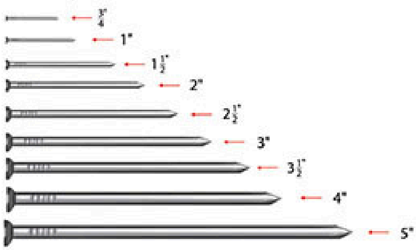
Glosario

Pulgada. Unidad de longitud del sistema inglés. Una medida en pulgadas puede representarse como 2 in o 2".

1. Dos hermanas fueron a comprar una cuerda de saltar; cada una fue a una tienda diferente. La hermana mayor compró una cuerda que medía 228 cm de largo y la hermana pequeña una que medía 25 dm de largo. ¿Cuál es la cuerda más larga? ¿La de la hermana mayor o la hermana menor? Explica tu respuesta. ______
2. Julieta está viajando en avión. La compañía aérea limita el equipaje de mano a 12 kg. La báscula de Julieta apenas mide la masa en gramos. Si su maleta "pesa" 11 000 g, ¿está por encima o por debajo del límite permitido? ¿De cuánto es la diferencia?

______

3. Luis se encarga de surtir los pedidos de los clientes en la tlapalería de su papá. Un cliente pidió clavos de 6.35 cm de largo, pero en la lista de su papá están acomodados por **pulgadas**, como muestra la imagen.



Su papá le dijo a Luis que esa medida es equivalente a los clavos de 2.5 in, Luis quiere colocar las medidas en centímetros en el resto de los clavos del muestrario, así no tendría que preguntarle a su papá cada vez que hicieran un pedido.

a) Con base en la información anterior, ¿cómo puede determinar Luis la media de cada clavo en centímetros? ______

______

b) ¿Cuál es la equivalencia de 1 pulgada en centímetros? ______

c) ¿Cuál de los clavos mide 8.89 cm de largo? ¿Cómo lo determinaste?

______

d) Calcula y anota en centímetros la medida de cada clavo del muestrario, escribe la respuesta junto a cada medida en pulgadas.

4. Con base en las medidas de los clavos en centímetros, ahora determina la medida de cada clavo en milímetros. Explica qué hiciste para determinarlo. ______

______

5. Compara tus respuestas con las de otro compañero. En caso de que existan diferencias, consulten a otros compañeros para aclararlas.

Unidades de medida para longitudes y distancias

En equipo, lean la información. Después, respondan las actividades.

Caballo cuarto de milla.

Hay muchas medidas que tal vez no conozcas y que se utilizan en diversas situaciones en nuestro país y en otros. Por ejemplo:

1. El cuarto de **milla (mi)** o *Quarter Horse* es una raza de caballo de carreras de caballería ligera, desarrollada en los Estados Unidos. Se llama así porque esta raza se ha especializado en carreras de $\frac{1}{4}$ de mi, es decir, aproximadamente 402 m.
   a) Con base en esta información determinen la longitud aproximada de una milla en metros (m). Argumenten su respuesta.
   ____
   b) ¿A cuántos kilómetros equivale una milla? ______________
   c) En una carrera de automóviles se debe recorrer 500 millas dando vueltas a una pista.
   Determinen qué distancia recorren en kilómetros. ______________

2. Durante un viaje en una aerolínea comercial, el capitán les dice a los pasajeros que cuando el avión alcance los 10 000 **pies** (ft) de altitud pueden utilizar sus dispositivos electrónicos y acceder a internet.
   Sergio está intrigado acerca de la altura en metros que representan 10 000 pies, ya que en México los pies no son una unidad de medida común. Consultó con un pasajero estadounidense y averiguó que 1 pie equivale a 12 pulgadas.
   a) Sabiendo lo que mide una pulgada, ¿cómo puede determinar la altura en metros
   y kilómetros que debe alcanzar el avión para utilizar internet? ______________
   ____
   b) Calculen a cuántos centímetros equivale 1 pie. ______________
   c) ¿A qué altura, en metros y en kilómetros, ya se pueden utilizar los dispositivos? ______
   ____
   d) Describan el procedimiento que siguieron. ______________
   ____

3. Comparen sus resultados con otros equipos. ¿El resto de tus compañeros llegó a los mismos resultados? Si los resultados fueron distintos, pero hay valores cercanos, y considerando que no hubo un error de cálculo, ¿cuál puede ser la causa de que sean diferentes?

Glosario

Milla. Unidad de longitud del sistema inglés que se utiliza para medir distancias "largas". Para simbolizar la milla, se utiliza mi.

Pie. Unidad de medida de longitud del sistema inglés.

APRENDEMOS

Para convertir unidades de un sistema a otro, por ejemplo, del Sistema Internacional de Unidades (SI) al sistema inglés y viceversa, se requiere de tablas que nos indiquen los valores básicos. La tabla de abajo muestra unidades de longitud del sistema inglés y su equivalencia en las unidades del SI.

Sistema de unidades	Unidad	Equivalencia en cm
Sistema Internacional	1 centímetro (cm)	1
	1 metro (m)	100
Sistema inglés	1 pulgada (in)	2.54
	1 pie (ft)	30.48
	1 yarda (yd)	91.44
	1 milla (mi)	160 934.4

El Sistema Internacional de Unidades y su abreviatura SI, fueron establecidos por la 11ª Conferencia General de Pesas y Medidas (en francés *Conférence générale des poids et mesures*, CGPM) en 1960.

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Describan en su cuaderno un procedimiento para realizar conversiones entre las unidades del SI y las del sistema inglés.
   a) ¿Existe relación de proporcionalidad entre las equivalencias? Expliquen su respuesta.

   ____

   b) Realicen las siguientes conversiones. Redondeen los resultados.

   1 milla = ________ yardas   1 yarda = ________ pulgadas   1 mi = ________ km

   c) Completen la siguiente tabla de equivalencias.

Equivalencias de unidades de longitud entre el Sistema Internacional y el sistema inglés						
Unidad	mm	cm	m	in	ft	yd
1 in						
1 ft						
1 yd						
1 mi						
1 mm						
1 cm						
1 m						
1 km						

Unidades de capacidad

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Juan debe pintar una pared, para ello utilizará una máquina con pulverización por medio de un aerosol, así obtendrá un acabado más homogéneo; además de que este mecanismo le permite ahorrar pintura.
   En las especificaciones de su máquina dice que, incluso si se considera un pequeño desperdicio de pintura, es posible pintar 8 m^2 por cada litro.

   a) Si la pared que desea pintar tiene 16 m de largo por 2 m de alto, ¿cuántos metros cuadrados debe pintar Juan? ______

   b) Si desea colocar tres capas de pintura para que dure más el color y el acabado, ¿cuántos litros de pintura necesita? ______

2. Ahora ya sabemos la cantidad total en litros de pintura que necesitará Juan; sin embargo, al llegar a la tienda se enfrenta con un nuevo reto, ya que la pintura no la venden por litro, sino en latas de un cuarto de **galón** (gal), medio galón o galones enteros.
   El encargado de la tienda le dice a Juan que las latas de $\frac{1}{4}$ de galón tiene casi un litro, pues contienen 0.946 litro.

   a) ¿A cuántos litros equivale un galón? ¿Cómo obtuvieron la medida? ______

   b) ¿Cómo pueden saber el total de galones que debe comprar Juan para que le alcance?

   c) Si Juan compra dos galones de pintura, ¿cuántas capas de pintura puede darle a la pared?

   d) ¿Cuál es el mínimo de latas de un galón y latas de $\frac{1}{4}$ que tiene que comprar? Expliquen su respuesta. ______

Glosario

Galón. Unidad de medida de capacidad del sistema inglés.

3. Analicen sus propuestas con las de otras parejas, argumentando su postura. Validar sus resultados a través de la comparación los ayuda a verificar la solución correcta al problema. ¿En qué coinciden sus propuestas? ¿En qué difieren? Registren sus acuerdos.

Unidades de masa

En equipo, resuelvan las siguientes actividades.

1. Como sabes la unidad principal del SI para medir la masa es el kilogramo (kg); el gramo (g) es otra medida de masa. En el sistema inglés, las unidades para medir la masa son la libra (lb) y la onza (oz).
   Por ejemplo, en el boxeo profesional hay 17 categorías, divididas por masa en libras, como muestra la siguiente lista.

Categorías en el boxeo	
Paja: abarca a los boxeadores que pesan menos de 105 libras, es decir, menos de 47.67 kg	
Minimosca: más de 105 lb hasta 108 lb	Mosca: más de 108 lb hasta 112 lb
Supermosca: más de 112 lb hasta 115 lb	Gallo: más de 115 hasta 118 lb
Supergallo: más de 118 lb hasta 122 lb	Pluma: más de 122 lb hasta 126 lb
Superpluma: más de 126 lb hasta 130 lb	Ligero: más de 130 lb hasta 135 lb
Superligero: más de 135 lb hasta 140 lb	Welter: más de 140 lb hasta 147 lb
Superwelter: más de 147 lb hasta 154 lb	Medio: más de 154 lb hasta 160 lb
Supermedio: más de 160 lb hasta 168 lb	Semicompleto: más de 168 lb hasta 175 lb
Crucero: más de 175 lb hasta 200 lb	Completo: más de 200 lb

   a) A partir del peso en kg de la categoría paja, ¿cómo pueden determinar la equivalencia entre libras y kilogramos? ________________

   b) ¿Cuántos kilogramos equivalen a 1 lb? ________________

   c) ¿Cuántas libras equivalen a 1 kg? ________________

2. Con base en esta información, determinen los rangos de peso de las diferentes categorías del boxeo en kilogramos. Anoten la medida a un lado de la correspondiente en cada caso.

   a) Si el peso máximo de un boxeador paja es de 1 680 onzas, ¿cuántas onzas equivalen a una libra? ________________

   b) ¿Cuántas gramos equivalen a una onza? ________________

   c) Si un boxeador rebasa por 8 onzas el peso de cierta división, ¿cuántos gramos tiene que bajar para llegar al límite superior de la categoría? ________________

d) ¿Qué operaciones permiten convertir kilogramos a libras? Escriban un ejemplo.

____

e) ¿Qué operaciones permiten convertir libras a kilogramos? ______________________________

____

f) ¿Qué operaciones permiten convertir onzas a gramos y viceversa? ______________________________

____

3. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otros equipos. Si existen diferencias y tienen dudas, busquen el apoyo del profesor para aclararlas y llegar a acuerdos.

4. Completen la siguiente tabla de equivalencias.

Equivalencias entre unidades de masa				
Unidad	g	oz	lb	kg
150 g				
24 oz				
3 lb				
2.5 kg				

APRENDEMOS

La unidad principal del Sistema Internacional para medir la capacidad es el litro (L), aunque existen otras unidades como el mililitro (ml).

1 L = 1 000 ml

Entre las unidades de capacidad del sistema inglés están el galón (gal) y la onza líquida (fl oz), que se usa para medir la capacidad de objetos pequeños.

1 gal = 3.785 L = 3 785 ml   1 fl oz = 29.57 ml

El kilogramo y el gramo son unidades para medir la masa del SI. Las unidades del sistema inglés que se usan para medir la masa son la onza (oz) y la libra (lb).

1 libra = 0.454 kg = 454 g   1 oz = 28.35 g = 0.02835 kg

Para realizar conversiones de unidades de medida del sistema inglés al SI, se multiplican las medidas por su equivalente de medida del SI. Por ejemplo:

3 gal = 3 gal (3.785 L/1 gal) = 11.355 L = 11 355 ml
3.5 lb = 3.5 lb (0.454 kg/1 lb) = 1.589 kg = 1 589 g

Para pasar de unidades del SI al sistema inglés, se dividen las unidades por su equivalente en el sistema inglés. Por ejemplo:

8.5 kg (1 lb/0.454 kg) = 18.72 lb   8.5 L (1 gal/3.785 L) = 2.24 gal

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente situación. Después, comparte tu opinión con otros compañeros.

1. Si un compañero dice que para pasar de galones a mililitros, basta con recorrer el punto decimal dos lugares a la derecha de la equivalencia en litros, por ejemplo, 2.5 gal = 9.4625 L = 946.25 ml, ¿qué le dirías?
2. Si un compañero dice que 4 oz = 113.4 g = 0.01134 kg, ¿esto es correcto? ¿Por qué?

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. En una cubeta de agua se vierten 20 litros de agua.
   a) ¿A cuántas onzas líquidas equivalen los 20 L? __________
   b) Si el contenido de la cubeta se vierte en recipientes de 1.5 litros de agua, ¿cuál es la capacidad de los recipientes en galones? __________
2. Las medidas reglamentarias de una cancha de futbol son 90 m de ancho por 120 m de largo, y un campo de futbol americano mide 120 yardas de largo por 53.3 yardas de ancho.
   a) ¿Es factible colocar dentro de un campo de futbol uno de futbol americano? Explica por qué. __________
   b) ¿Cuántos metros sobran o faltan a lo largo y ancho? __________
   c) ¿Cuántas yardas representan las medidas anteriores? __________
3. Lee el siguiente problema y luego contesta las preguntas:
   Para llenar una alberca con capacidad de 500 galones se utiliza el agua de un tinaco de 1 000 litros.
   a) ¿Es posible llenar la alberca con una carga completa del agua del tinaco? ¿Por qué? __________
   b) ¿Cuántos tinacos se necesitan para llenar la alberca? ¿Cómo lo indagaste? __________
   c) ¿Con cuántos litros se llena la alberca? __________
4. Sabías que el metro es la longitud de la trayectoria recorrida en el vacío por la luz durante un tiempo de $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo. De aquí resulta que la velocidad de la luz en el vacío es igual a 299 792 458 m/s.
   a) ¿Cuántos km recorre la luz en el vacío en un segundo? __________

5. En medicina es común colocar **catéteres** vasculares para administrar suero o medicamentos, los cuales se liberan en cantidades de mililitros por minuto. Por ejemplo, el suero normalmente se administra a 35 ml por minuto.
   a) ¿Cuántas onzas líquidas de suero se administran por minuto? ______________________
   b) Un recipiente con 0.875 litros de suero, ¿cuántos minutos tardará en administrarse a un paciente? ______________________

6. Las medidas de muchas herramientas están expresadas en pulgadas, por ejemplo, las llaves Allen. Anota en centímetros la medida de las siguientes llaves.

   a) $\frac{1}{2}$ pulgada = __________ b) $\frac{3}{4}$ de pulgada = __________ c) $\frac{5}{8}$ in = __________

7. Luis hizo una expedición en la que recorrió 20 km, 75 hm, 75 dam y 250 m en tres etapas. En la primera recorrió 5 km y 5 hm, y en la segunda 1 km 50 dam. ¿Qué distancia recorrió en la tercera etapa? Expresa el resultado en m. ______________________

____

8. Un librero puede resistir hasta 10 kg y se quiere colocar en él libros cuya masa es de 800 g. ¿Cuántos libros pueden colocar como máximo en el librero sin rebasar el límite de la masa que puede sostener? ______________________

9. Para un experimento de laboratorio cada estudiante usa 6.55 g de cloruro de sodio. El instructor abre un frasco nuevo de 1.125 kg y 24 estudiantes toman la cantidad estipulada, ¿cuánto quedará en el frasco al final de la sesión de laboratorio?

____

Glosario

Catéter: En un procedimiento en el que se inserta un tubo de plástico estéril flexible dentro de un vaso sanguíneo para permitir la extracción de sangre o la administración de medicamentos al torrente sanguíneo.

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Hay calculadoras científicas que pueden crear tablas de conversión entre unidades. Por ejemplo, la siguiente imagen muestra la tabla de conversión de pulgadas a centímetros. Verifica si la tuya tiene esa función y utilízala en conversiones como las trabajadas en la lección.
2. También, en una hoja de cálculo electrónica puedes crear tablas de conversiones entre unidades de SI y del sistema inglés.
   a) ¿Hay proporcionalidad al realizar una tabla de conversiones entre unidades de masa en kg a lb?
   b) ¿Cuál sería la constante de proporcionalidad?
3. Utiliza lo anterior para crear tus tablas de equivalencias en la hoja de cálculo electrónica. Ingresa valores de distintas unidades del SI y del sistema inglés en diferentes celdas y utiliza las fórmulas de la multiplicación y división para crear tus tablas. Por ejemplo: =A1*2.54; =B3/0.454, etcétera.
4. Si tienes posibilidades, imprime tu trabajo y compártelo con tus compañeros.

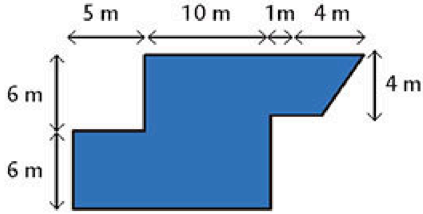
L15 Área de polígonos irregulares y regulares

COMENZAMOS Reflexiona y discute

Simplificando modelos

En equipo, resuelvan la siguiente situación.

1. La siguiente figura representa la estancia de una casa a la cual se le quiere cambiar el piso. Para saber cuántas cajas de loseta se necesitan, primero tienen que determinar la superficie total de la estancia.



a) ¿Qué procedimiento permite calcular el área de la figura? ______

b) Realicen los trazos necesarios y, en el siguiente espacio, escriban las operaciones para obtener el área total de la estancia.

c) ¿Cuál es la superficie total del piso? ______

2. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otros equipos y la forma en que ellos seccionaron la figura.

a) ¿Realizaron la misma partición en secciones que ustedes? ______

b) Aunque hayan realizado otro tipo de partición de la figura total, ¿todos deben obtener la misma área o depende de la forma en que la hayan dividido? ______

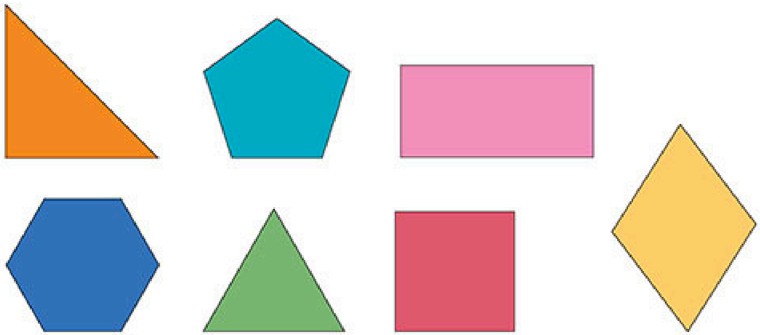
______

c) Si cada caja contiene ocho losetas de 55 × 55 cm cada una, ¿cuántas cajas se requieren para cubrir todo el piso? ______

Los resultados del examen

Cálculo del área de polígonos regulares

1. Observen las siguientes figuras y anoten su nombre junto a cada una. Después, contesten las preguntas.



a) ¿Cuáles tienen todos sus lados iguales? ______________________

____

b) ¿Qué figuras tienen sus ángulos iguales? ______________________

____

c) ¿Qué figuras tienen sus lados y sus ángulos interiores iguales?

____

d) ¿Qué nombre reciben las figuras que tienen sus lados y ángulos iguales?

____

e) ¿A qué figuras pueden calcularles su área y perímetro a través de una sola fórmula?

____

2. Observen el octágono regular y respondan.

a) ¿Cómo dividirían la figura para calcular su área?

____

b) Dividan la figura, tomen las medidas y calculen su área.

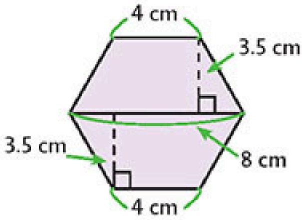
____

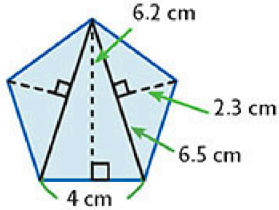
3. Compartan sus resultados y estrategias con otros compañeros. En caso de que existan diferencias, comenten su procedimiento en busca de posibles errores.

Cálculo del área de polígonos regulares

En equipos de tres o cuatro integrantes resuelvan las actividades.

1. Analicen cómo se dividieron las siguientes figuras para calcular su área y respondan las preguntas.





a) ¿Cómo se dividió el hexágono regular? ________________________

b) ¿Qué fórmula permite calcular el área de dichas figuras? ________________________

c) ¿Cuál es el área de cada figura en las que se dividió? ________________________

d) ¿Cuál es el área del hexágono? ________________________

e) ¿Cuál es el área del pentágono? ________________________

f) Describan el procedimiento que siguieron. ________________________

____

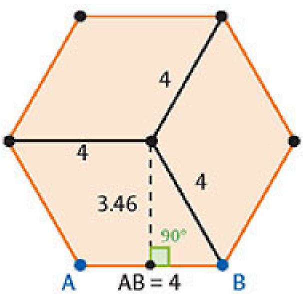
2. Ahora, observen el siguiente hexágono regular que fue seccionado en tres cuadriláteros.

a) ¿Cómo determinarían el área total del hexágono? Desarrollen y describan el procedimiento.

____

____

____



b) Con las medidas que se les han proporcionado, ¿podrían calcular el área de cualquier hexágono regular mediante alguna fórmula? Expliquen su respuesta.

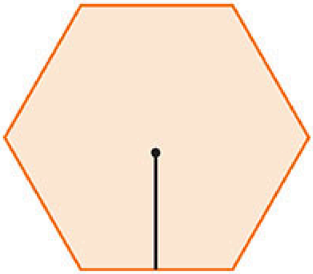
____

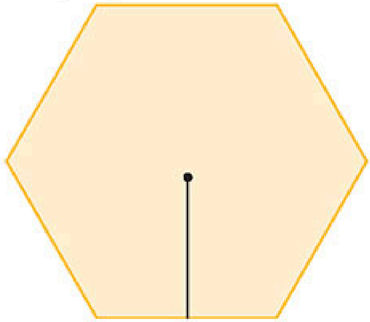
____

3. Tomen las medidas de las figuras, apliquen su procedimiento y calculen el área de los siguientes hexágonos regulares a partir de los lados y la **apotema**.

Glosario

Apotema. Segmento que une el punto medio de los lados de un polígono regular con su centro.



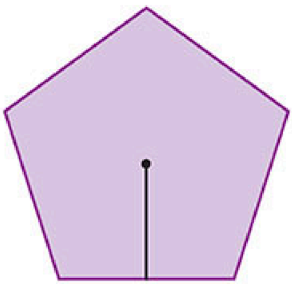


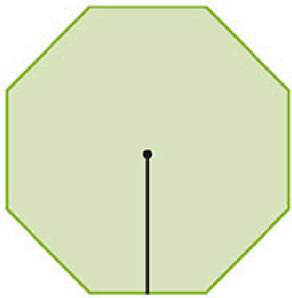
A = ______________________ A = ______________________

a) Escriban una fórmula que les permita calcular el área de cualquier hexágono regular a partir de sus lados y su apotema. ______________________

b) ¿Puede haber fórmulas distintas que lleven a los mismos resultados correctos? Justifiquen su respuesta. ______________________

4. Analicen los siguientes polígonos; si lo requieren, divídanlos, realicen los trazos necesarios, tomen las medidas y calculen su área.





A = ______________________ A = ______________________

a) ¿Pueden utilizar la fórmula que obtuvieron para el hexágono para calcular el área del pentágono y la del octágono? ¿Por qué? ______________________

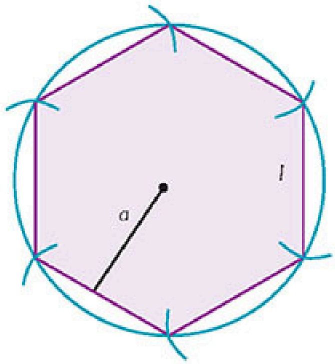
____

5. Comparen sus resultados y procedimientos con los de otro equipo. Busquen una manera única de calcular el área de los polígonos. Registren sus acuerdos en su cuaderno.

Triangulación de polígonos regulares

En pareja, analicen la siguiente situación y realicen lo que se pide.

1. El siguiente hexágono regular se trazó a partir de una circunferencia, es decir, está inscrito en ésta.



a) Dividan el hexágono en seis triángulos desde el centro de la figura.

b) Si se denota con l la longitud de cada lado del hexágono, ¿cuál es la fórmula para obtener su perímetro? ____________________

c) ¿En qué tipo de triángulos quedó dividido el hexágono? ____________________

d) ¿Todos los triángulos son iguales? ¿Por qué? ____________________

e) Considerando las medidas, ¿cuál es el área de cada triángulo? ____________________

f) ¿Cómo pueden obtener el área del hexágono a partir de lo anterior? ____________________

____

g) Si l = 6 cm y la apotema (a) = 5.2 cm, ¿cómo determinarían el área total del hexágono sin usar la fórmula de la sección anterior? ____________________

h) Resuelvan las operaciones y calculen el área del hexágono. ____________________

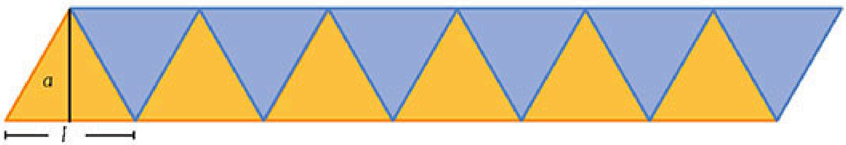
i) Si l = 8 cm y a = 6.9 cm, ¿cuál es el área del hexágono? ____________________

2. Comparen sus resultados con los de otras parejas. ¿Llegaron al mismo resultado? ¿El procedimiento fue el mismo? Discutan si este procedimiento permite calcular el área de cualquier polígono regular. Justifiquen su postura.

____

____

3. Tracen en una hoja de papel dos hexágonos regulares congruentes, divídanlos en triángulos desde su centro y formen un paralelogramo, como se muestra:



a) ¿Qué medida del héxagono representa la base del paralelogramo?

____

b) ¿Qué representa la apotema en el paralelogramo? ____________________

c) Escriban cuál es la relación entre el área del paralelogramo y la del hexágono.

____

d) Si denotamos con *P* al perímetro del hexágono o base del paralelogramo y consideramos la apotema (a) como la altura, anoten la fórmula para calcular el área del paralelogramo.

____

e) Utilicen la fórmula anterior para escribir otra para calcular el área del hexágono.

____

4. Construyan un paralelogramo a partir de dos pentágonos como el que se muestra.

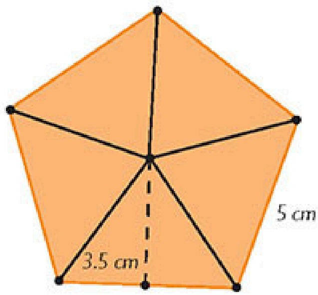
a) Considerando las medidas que se muestran, ¿cuánto mide la base y la altura del paralelogramo? ____________________

b) La fórmula que anotaron arriba, ¿sirve para calcular el área del pentágono? ¿Por qué? ____________________

____

c) ¿Cuál es el área del pentágono? ____________________

d) Expliquen si lo anterior se puede aplicar a cualquier polígono regular y por qué.



____

5. Discutan sus respuestas en grupo y, con el apoyo del profesor, establezcan una fórmula para calcular el área de cualquier polígono regular y descríbanla.

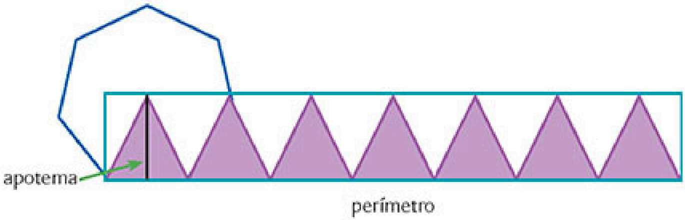
____

____

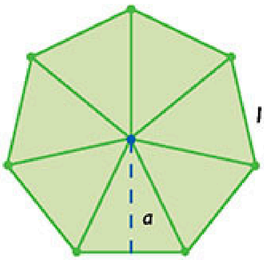
APRENDEMOS

Las fórmulas para calcular el área de diversas figuras se pueden deducir a partir de las fórmulas de figuras más sencillas que ya conocemos.

Por ejemplo, el caso de un polígono regular de *n* lados siempre se podrá dividir en *n* triángulos congruentes desde su centro a sus vértices, y así podemos construir un paralelogramo cuya base es igual al perímetro del polígono y la altura es igual al apotema, por tanto, el área del polígono es perímetro × apotema ÷ 2.



Lo anterior puede representarse de la siguiente forma, consideremos el heptágono regular.



Donde *l* es la media de sus lados y *a* representa la **apotema**, que es un segmento perpendicular a uno de sus lados a partir del centro del polígono, y que podemos considerar como la altura de cada uno de los siete triángulos congruentes en que se divide el heptágono.

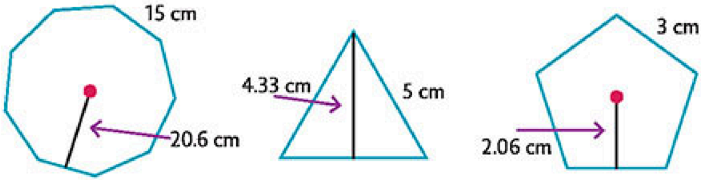
De esta manera el área de cada triángulo sería igual a $\frac{l(a)}{2}$.

Si a partir del área de cada triángulo calculamos el área del heptágono completo, tenemos que: $A = \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2} + \frac{l(a)}{2}$.

Si simplificamos un poco la expresión tendríamos: $A = 7\frac{l(a)}{2}$; esto sería igual a: $A = \frac{7l(a)}{2}$. Podemos darnos cuenta de que (7)(*l*) equivale al perímetro del polígono, así que podemos generalizar la fórmula a: $A = \frac{P(a)}{2}$.

TAREA

1. Calcula el área y el perímetro de los siguientes polígonos regulares.



P = ____________________ P = ____________________ P = ____________________

A = ____________________ A = ____________________ A = ____________________

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente situación. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero dice que la apotema de un polígono regular mide lo mismo que los lados de los triángulos que se forman desde el centro del polígono, ¿qué le dirías?

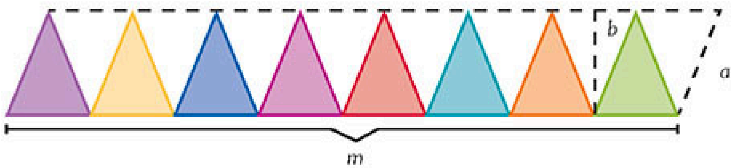
Al calcular el área de polígonos regulares es importante determinar primero su perímetro, a fin de no confundir la media de su lado con la de su apotema, ya que éste es un error común.

Crea y evalúate

CONCLUIMOS

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Observa las figuras formadas con los triángulos de polígonos regulares y contesta las preguntas.

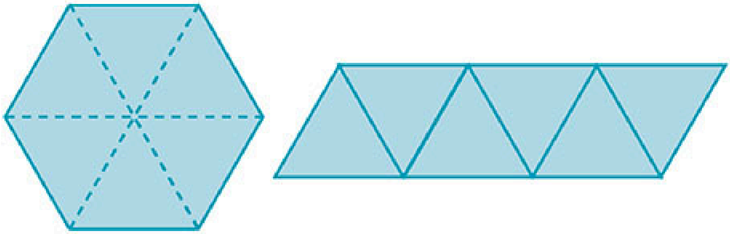


a) ¿De qué polígono se trata? ______________________________

b) ¿Cuál de las siguientes fórmulas sirve para calcular su área?

- am
- $\frac{am}{5}$
- mb
- $\frac{mb}{2}$

2. Santiago trazó un hexágono regular y con él construyó un paralelogramo como el que se muestra.



a) ¿El área del paralelogramo es el doble que la del hexágono? ¿Por qué? ______

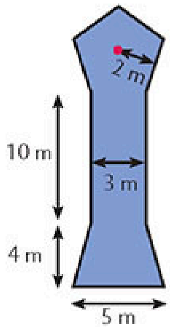
______

b) ¿Qué procedimiento permite obtener el área del hexágono a partir del área del paralelogramo? ______

______

c) Escribe una expresión para obtener el área del polígono en función del perímetro (P) y la apotema (a): ______

3. Obtén el área total de la siguiente figura. Escribe las operaciones necesarias.



4. Resuelve lo que se pide.

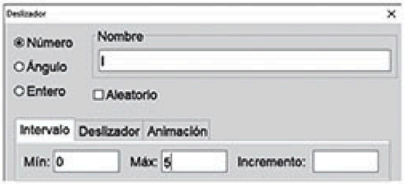
a) Calcula la apotema de un pentágono de 5 m de lado y 43.75 m^2 de superficie: ______
b) El perímetro de un pentágono regular es 45 cm y su apotema mide 6.4 cm, ¿cuál es su área? ______
c) Con un polígono regular se forma un paralelogramo, cuya base mide 10 *u* y su altura es igual a *h*. Escribe una expresión que represente el área del polígono. ______

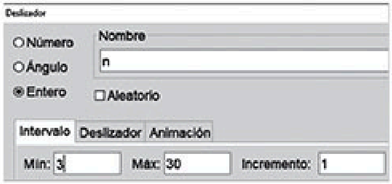
APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Con Geogebra podemos explorar el área de los polígonos a través de varias herramientas.

   a) Con 

, construye dos deslizadores con distintas configuraciones, como muestran las siguientes imágenes.





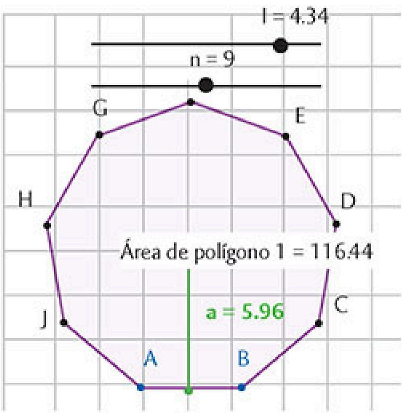
   b) Con la herramienta "Segmento de longitud dada", contruye un segmento y llámalo *l*, que es el nombre del primer deslizador.

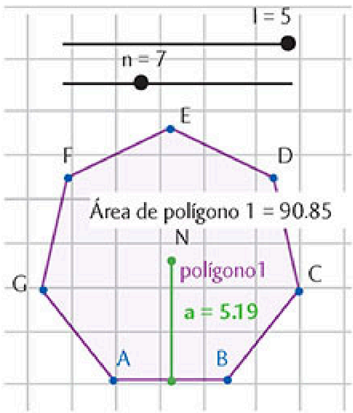
   c) Después, traza un polígono regular y en la ventana correspondiente escribe n, que corresponde al número de lados del polígono según el deslizador n.

   d) Con la herramienta , determina el centro del polígono y el punto medio del segmento inicial. Construye un segmento que represente la apotema a partir de los puntos anteriores.

   e) Con las herramientas correspondientes, muestra en la ventana la medida de la apotema, del perímetro y del área del polígono.

2. Mueve los deslizadores y observa cómo cambia el polígono y sus medidas, como se muestra en las imágenes.





   a) Toma nota de las medidas que aparezcan en uno de los polígonos al azar y calcula el área utilizando la fórmula para validarla a partir de las medidas que muestra la figura.

Eje: Análisis de datos • Tema: Estadística • Aprendizaje esperado: Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

L16 Medidas de tendencia central y de dispersión

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Analicemos los datos

Analiza el caso propuesto a continuación; después, realiza lo que se pide.

1. Considera los siguientes datos que corresponden a las calificaciones de un examen en un curso de capacitación de una empresa.
5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5.
   a) Utiliza una gráfica o una tabla para organizar la información y calcula los valores de las medidas de tendencia central.

      Media: ______________ Mediana: ______________ Moda: ______________
   b) Los valores de la variable, ¿se "alejan" de la media? Explícalo.

      ____
   c) ¿Cuál es la diferencia entre el valor mayor y el menor, es decir, cuál es el rango?

      ____
2. La siguiente lista muestra los resultados del mismo examen aplicado a un segundo grupo de personas.
2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8
   a) Anota los valores de las medidas de tendencia central.

      Media: ______________ Mediana: ______________ Moda: ______________
   b) Los valores de la variable, ¿se "alejan" unos de otros? Explícalo. ______________

      ____
   c) ¿Cuál es el valor del rango? ______________
   d) ¿Cuál de los dos grupos consideras que tuvo mejor rendimiento durante el examen?

      Explica tu postura. ______________
3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Discutan la última pregunta y el criterio que siguieron para responderla. ¿Se puede usar otro criterio que no sea la media, mediana o moda para determinar qué grupo tuvo mejor rendimiento? Registren sus acuerdos.

   ____

Aprende y aplica

SIGAMOS ADELANTE

Los resultados del examen

En pareja, retomen la situación de la página anterior y resuelvan lo que se pide.

1. Consideren los siguientes datos que corresponden a los resultados de un tercer grupo de empleados que realizó el mismo examen de capacitación.
   1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9
   a) Los valores de las medidas de tendencia central son:

      Media: ______________ Mediana: ______________ Moda: ______________

   b) Los valores de la variable, ¿se "alejan" unos de otros? Explícalo. ______________

      ____

   c) ¿Cuál es el rango del conjunto de datos? ______________

   d) ¿Qué similitud hay entre estos valores y los anteriores? ______________

      ____

   e) ¿Qué grupo consideran que tuvo mejor rendimiento? Justifiquen su elección.

      ____

2. En estadística se construyen métodos para evitar utilizar toda una colección de datos y referirse sólo a un número o valor que pueda aportar información acerca de la colección, como pueden ser las medidas de tendencia central.
   Como pudieron ver, en los conjuntos de datos anteriores varios tienen las mismas medidas de tendencia central, particularmente la misma media, por lo tanto, no se podría decir qué tan diferentes u homogéneos (parecidos) son.
   a) Respecto al rango en los datos de los tres grupos anteriores, ¿qué pueden concluir? ¿En qué grupo los datos son más dispersos? ¿Por qué? ______________

      ____

   b) Calculen la diferencia de cada dato a la media (dato − media) y sumen los resultados.

      Grupo 1: ______________ Grupo 2: ______________ Grupo 3: ______________

   c) ¿Qué observan? ¿Lo anterior podría ser un criterio para evaluar el rendimiento de los equipos? ¿Por qué? ______________

      ____

3. Comenten sus respuestas con las de otra pareja. Discutan sobre los criterios que se pueden seguir para comparar dos conjuntos de números cuando sus medidas de tendencia central son muy similares.

Más sobre la media

En pareja, lean la siguiente situación, coméntenla y respondan lo que se pide.

1. En un despacho de cuentas por cobrar están comparando el desempeño de dos empleados, con el fin de decidir con cuál de ellos renovarán contrato, debido a que no tienen presupuesto para recontratar a ambos, pero quieren ser lo más justos posible.
El jefe pensó en usar el promedio de llamadas a clientes con adeudos durante una semana. Los siguientes datos representan las llamadas de ambos empleados.

Empleado	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
A	80	90	100	110	120
B	0	50	100	150	200

a) Ayúdenle a obtener la media de los resultados de ambos empleados.

Media del empleado 1: ______________ Media del empleado 2: ______________

b) ¿Es posible tomar una decisión a partir de la media? ¿Por qué? ____________________

____

2. El jefe buscó otra manera de tomar la decisión y pensó en revisar las diferencias que hay entre el dato menor y mayor de cada empleado. Obtengan dichas diferencias.

a) Diferencia entre el dato mayor y el dato menor del empleado 1: ______________

b) Diferencia entre el dato mayor y el dato menor del empleado 2: ______________

c) ¿Qué significado pueden atribuir a dichas diferencias? ____________________

d) Calculen la distancia de cada dato a la media y escriban su valor absoluto.

Empleado A

Llamadas	Distancia a la media
80	
90	
100	
110	
120	
Total	

Empleado B

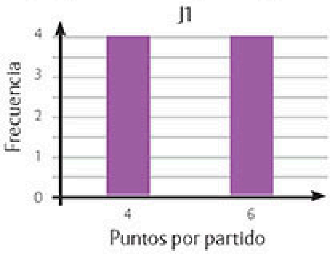
LLamadas	Distancia a la media
0	
50	
100	
150	
200	
Total	

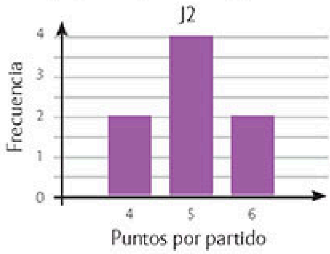
3. Comenten con otros compañeros: ¿cómo pueden influir los datos anteriores en la decisión del jefe del despacho?

____

En trío, resuelvan lo siguiente. Luego, registren las respuestas consensuadas.

1. El rango es una medida de la dispersión de datos, no obstante, hay conjuntos de datos diferentes que pueden tener el mismo rango y, además, la misma media aritmética, por ello se necesitan otras formas o medidas para comparar dos conjuntos de datos.
   En el siguiente caso, los datos de las gráficas pertenecen a dos jugadores de voleibol (J1 y J2) y muestran los puntos que cada uno obtiene por partido para su equipo.





   a) ¿Cuál es el promedio y el rango del jugador 1? ____________________

   b) ¿Cuál es el promedio y el rango del jugador 2? ____________________

   c) ¿Es posible comparar el rendimiento de ambos jugadores con estos valores? __________

   ____

2. Entonces, el rango es una medida para analizar la dispersión de los datos, pero será mejor considerar otras opciones. Una de ellas es la diferencia de cada dato respecto a la media y luego la suma de esas diferencias. Completen las siguientes tablas.

Dato	Dato – media	Diferencia con la media
4	4 – 5 =	–1
4	4 – 5 =	
4	4 – 5 =	
4	4 – 5 =	
6	6 – 5 =	
6	6 – 5 =	
6	6 – 5 =	
6	6 – 5 =	
Suma de las diferencias		

Dato	Dato – media	Diferencia con la media
4	4 – 5 =	
4	4 – 5 =	
5	5 – 5 =	
5	5 – 5 =	
5	5 – 5 =	
5	5 – 5 =	
6	6 – 5 =	
6	6 – 5 =	
Suma de las diferencias		

   a) ¿Cómo se muestran estas sumas de diferencias en las gráficas? ____________________

   ____

   b) ¿Es un valor que permite comparar a ambos jugadores? ¿Por qué?

   ____

3. Obtengan el valor absoluto de las diferencias con la media y súmenlos.

Dato	Dato – media	Valor absoluto
4	4 – 5 = –1	1
4		
4		
4		
6		
6		
6		
6		
	Total:	

Dato	Dato – media	Valor absoluto
4	4 – 5 = –1	
4		
5		
5		
5		
5		
6		
6		
	Total:	

a) En este caso, ¿la suma de las diferencias cambia? ¿Por qué? ____________________

____

b) Si obtenemos la media de dichas diferencias, ¿qué valor se obtiene en cada caso?

- Promedio de las diferencias del jugador 1: ____________________
- Promedio de las diferencias del jugador 2: ____________________

c) ¿Por qué este dato es útil para determinar qué jugador es menos disperso, es decir, cuál fue más constante en la acumulación de puntos por partido? Expliquen su respuesta.

____

d) ¿Consideran que es mejor tener un jugador más o menos disperso? Explíquenlo.

____

4. Comparen sus resultados con los de otros compañeros, si existen diferencias, busquen llegar a acuerdos sobre las ventajas de calcular la distancia de cada dato a la media para comparar los conjuntos de datos. Validen sus acuerdos con el profesor y anótenlos.

____

____

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un amigo te dice que calcular la diferencia de cada dato con la media es lo mismo que calcular la distancia de cada dato a la media, ¿qué le dirías?
2. ¿Será lo mismo la suma de las diferencias de cada dato con la media, que la suma de las distancias de cada dato con la media? ¿Por qué?

APRENDEMOS

Cuando se tiene una muestra de datos obtenida de una población, es importante determinar sus medidas de tendencia central si se quieren comparar. Pero también es importante determinar qué tan dispersos son los datos en la muestra, por lo que debe determinarse su rango o su **desviación media**, entre otras medidas, llamadas de dispersión, ya que mucha variabilidad o dispersión en los datos indica, en la mayoría de los casos, la inestabilidad de un proceso.

La desviación media es la **medida de dispersión** más utilizada y es igual a la distancia de cada valor a la media (recuerda que las distancias siempre tienen valor positivo). Por ejemplo, si tenemos dos equipos, A y B y sus goles por partido son:

	A	B
1	2	2
2	4	3
3	6	4
4	8	8
5	5	8
6	6	3
7	4	2
8	5	2
9	6	8
10	4	8
11	7	8
12	2	4
13	5	5
14	5	2
15	6	8

A	A	B	A
Dato - media	Dato - media (valor absoluto)	Dato - media	Dato - media (valor absoluto)
− 3	3	− 3	3
− 1	1	− 2	2
1	1	− 1	1
3	3	3	3
0	0	3	3
1	1	− 2	2
− 1	1	− 3	3
0	0	− 3	3
1	1	3	3
− 1	1	3	3
2	2	3	3
− 3	3	− 1	1
0	0	0	0
0	0	− 3	3
1	1	3	3
SUMA	18	SUMA	36

Y luego dividimos esta suma por el número de partidos, obtenemos la desviación media (x): Desviación media equipo A = 18/15 = 1.2. Desviación media equipo B = 36/15 = 2.4. De esta forma podemos ver que, aunque ambos conjuntos tienen la misma media y el mismo rango, su dispersión es distinta. El equipo A es más homogéneo (parejo o consistente) que el B; en el B, los goles de cada partido se apartan más de la media. Por ello, la dispersión del grupo B es mayor que la del grupo A, porque es menos homogéneo que éste; el grupo A tiene una desviación media menor que la del grupo B.

Por tanto, la desviación media nos indica el grado de dispersión, es decir, de homogeneidad de cada grupo de datos.

Una misma media de 5 puede proceder de un grupo en el que todos tienen un 5 (dispersión = 0, grupo muy homogéneo, es decir, todos los sujetos son iguales); y una media de 5, también puede proceder de un grupo en el que la mitad de los sujetos tiene un 0 y la otra mitad un 10.

Una misma media puede corresponder a grupos muy distintos y, por consiguiente, aportar una información descriptiva incompleta que se presta a conclusiones falsas o no muy certeras. Por ello, la importancia de las medidas de dispersión.

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. A continuación, te mostramos el tiempo en minutos que tardaron dos operadores en un centro de atención a clientes entre un cliente y otro, es decir, el tiempo que tardan en terminar una llamada y realizar la siguiente.
Operador A: 9, 5, 3, 2, 1, 2, 6, 4, 9, 8, 1, 3, 5, 4, 2, 6, 3, 2, 5, 6
Operador B: 1, 1, 3, 2, 5, 6, 7, 2, 5, 8, 3, 1, 2, 6, 5, 8, 9, 9, 2, 1

   a) ¿Cuál es la media de cada operador y el rango? ______________________
   b) Determina cuál de los dos tiene mayor dispersión en el tiempo de preparación entre una llamada y otra. ______________________

2. La siguiente tabla muestra dos conjuntos de datos sobre la cantidad de lluvia en milímetros cúbicos (mm^3) en dos ciudades (C. M. y C. G.) durante un año.

Mes / Ciudad	Cantidad de lluvia en mm^3 en dos ciudades											
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
C. M.	86	135	177	165	305	290	231	305	243	122	66	67
C. G.	40	77	84	89	147	166	184	251	209	110	34	12

   a) Determina qué ciudad es más constante respecto a la cantidad de lluvia anual, lo que es importante para decidir el cultivo de ciertas variedades de plantas. Utiliza la desviación media para tomar una decisión al respecto.

   Desviación de media C.M.: __________ Desviación de media C.G.: __________

3. Tres jugadores de basquetbol son sometidos a una prueba de tiros a la canasta desde 10 posiciones distintas en la cancha. El número de encestes desde cada posición se muestra en la siguiente tabla. Calcula la desviación media de cada basquetbolista y determina cuál tuvo mejor rendimiento.

Posición	Número de encestes de cada jugador		
	Carlos	Pedro	Juan
1	2	7	5
2	9	2	6
3	10	2	5
4	2	6	5
5	3	6	5
6	1	3	5
7	9	6	4
8	9	7	5
9	1	6	6
10	4	5	4

4. Cuatro laboratorios farmacéuticos que llamaremos A, B, C y D, realizaron cinco mediciones de una misma muestra de sangre cuya lectura real debería ser igual a 10 ml. Cada laboratorio utilizó diferentes procesos y obtuvo las siguientes medidas de cada muestra:

Mediciones de muestras de sangre en cada laboratorio (ml)			
A	B	C	D
10.09	9.88	9.79	10.04
10.1	10.02	10.19	10.02
10.08	10.14	9.78	9.98
10.11	10.21	10.05	9.97
10.12	9.8	9.69	10.04

Mediante la desviación media de las mediciones de cada laboratorio, determina en qué caso el procedimiento de medida fue más homogéneo. ______________________________

5. Bajo la coordinación de tu profesor, dividan al grupo en 3 equipos del mismo número de integrantes.
   a) Cada integrante de cada equipo, por su lado, deberá estimar la altura del edificio, sin tomar riesgos y bajo la orientación de su profesor.
   b) Cada equipo deberá trazar su estrategia y compartirla con el resto de los equipos. Después deben ejecutar su estrategia en orden.
   c) Deberán obtener la media de cada equipo por un método distinto. Una vez que tengan su conjunto de mediciones, calculen la desviación media.
   d) Por último, comparen sus mediciones, medias y desviaciones medias, para saber que equipo obtuvo mediciones más homogéneas.

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En Geogebra se puede observar gráficamente la dispersión de un conjunto de datos o de varios conjuntos. Compáralos de la siguiente manera.

	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	5
4	7	6
5	9	9

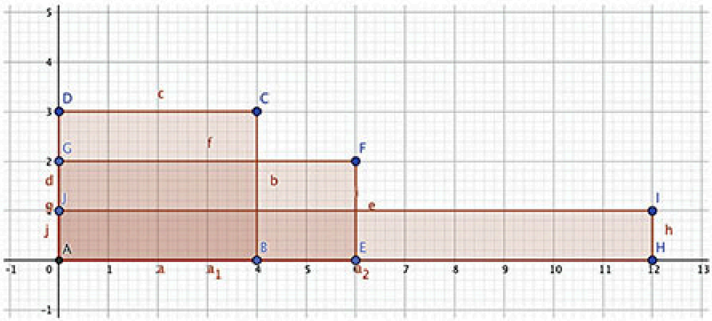
   a) En un archivo, abre una hoja de cálculo e ingresa dos conjuntos de datos como se muestra a continuación y selecciona todos los datos de ambas columnas.
   b) Con la herramienta Analisis de una variable, cambia la gráfica de histograma por una gráfica de puntos y da clic en "Analiza".

2. Describe el procedimiento que utilizarías con la hoja de cálculo para calcular la desviación media de cada uno de los conjuntos de datos.

P2 Herramientas matemáticas

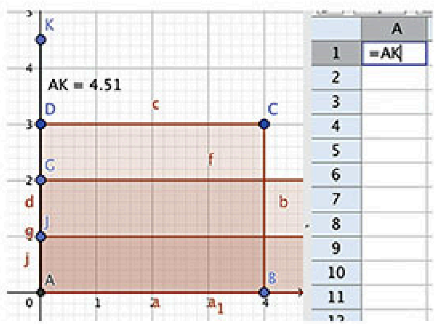
Geogebra es una herramienta útil para representar distintas medidas de figuras geométricas, como el largo y alto de un rectángulo, cuya área es constante; esto es conveniente para trabajar situaciones de proporcionalidad inversa.

1. Consideremos la situación de todos los rectángulos cuyas medidas den como resultado un área de 12 u^2, por ejemplo, el rectángulo de 4×3.
   Abre un archivo en Geogebra y con la herramienta "Polígono": , construye todos los rectángulos cuyas medidas enteras den como resultado un área de 12 u^2, representa el largo en el eje x y el alto en el eje *y*, como muestra la siguiente imagen.



2. Con base en las medidas de los rectángulos contesta las siguientes preguntas.
   a) ¿Qué sucede con la altura cuando el largo aumenta? ______
   b) ¿Qué sucede con la altura cuando el largo disminuye? ______
   c) Si la medida del largo se representa por x y la altura con *y*, escribe una expresión que represente la relación del área. ______

3. Ahora, traza un "segmento móvil" que vaya desde cero sobre el eje y de cualquier medida, pero menor a 12.
   a) En una hoja de cálculo registra la medida del segmento en la celda A1, como muestra la imagen, y da enter.
   b) ¿Cómo puedes calcular la medida del largo del rectángulo que resulta al ingresar la fórmula en la celda B1? ______
   c) Ingresa la fórmula para conocer la medida del largo del rectángulo que se formaría con dicho segmento.

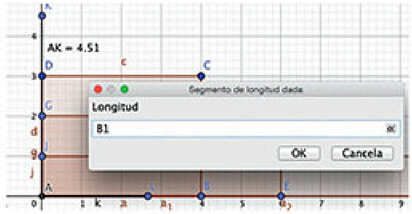


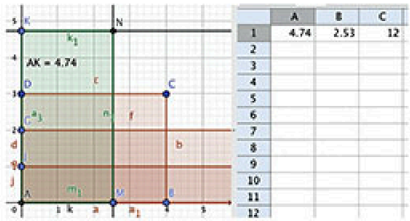
4. La medida registrada en B1 puede tomarse para trazar un segmento desde cero sobre el eje de las x.
   a) Selecciona "Segmento dada su longitud": , coloca el cursor en (0, 0) y escribe B1 en la ventana que aparece y da clic en OK.
   b) En la celda C1, escribe la fórmula: =A1*B1.
   c) Traza rectas perpendiculares a los extremos de los segmentos sobre x y y; con la herramienta "Polígono" forma el rectángulo correspondiente.
   d) Coloca el cursor sobre un vértice del rectángulo y muévelo.
   e) ¿Qué sucede con los valores correspondientes en la tabla?

   ____

   f) ¿Qué significa lo anterior? ______________________________

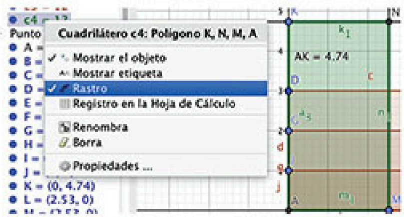
   ____

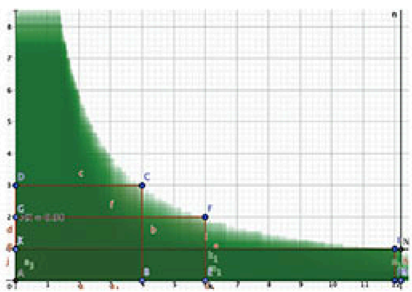




Podemos ubicar la intersección cuyas coordenadas representan valores de abscisa y ordenada, y que al multiplicarse den por resultado 12. Y en C1 podemos ver el producto de =A1*B1.

5. Coloca el cursor sobre el rectángulo, da clic al botón derecho del ratón y activa la función "Rastro".
   a) Mueve el vértice del rectángulo hacia arriba y hacia abajo para observar la gráfica que se forma a partir de la relación entre el largo y el ancho cuando tenemos una media de área constante.
   b) ¿Qué tipo de gráfica es la que se forma?
   c) ¿En qué momento las medidas de largo y ancho son casi iguales? Mueve la figura para averiguarlo.
   d) Si calculas el perímetro de los rectángulos, ¿qué figuras tienen mayor perímetro y cuáles menor?





6. Prueba nuevamente la herramienta, formando rectángulos de área 24 u^2 y 36 u^2, por ejemplo.

Evalúate. Mide tu desempeño

Estima tu nivel de desempeño. Antes de contestar la evaluación, regresa a la lección correspondiente de cada indicador y realiza una actividad de repaso del tema que requieras.

Indicador	Niveles de desempeño		
	Me resulta complicado	Necesito apoyo	Logro resolverlo solo
Resuelvo divisiones de fracciones y números decimales positivos y negativos.			
Identifico números cuadrados perfectos y aproximo raíces cuadradas.			
Resuelvo problemas de reparto proporcional.			
Resuelvo sistemas de ecuaciones 2×2 mediante diferentes procedimientos, incluido el método gráfico.			
Identifico y represento expresiones algebraicas equivalentes a partir de modelos geométricos.			
Realizo conversiones entre unidades del SI y del sistema inglés.			
Calculo el área de polígonos regulares y del círculo, aplicando las fórmulas correspondientes.			
Utilizo las medidas de tendencia central, el rango y la desviación media en el análisis de un conjunto de datos.			

Evaluación. Segundo periodo

Lee los problemas y resuelve lo que se pide.

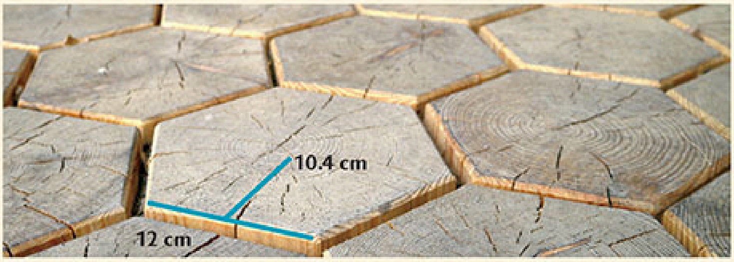
1. Ulises y Adriana compraron juntos un lote de cinco libros usados y los van a revender. El lote costó $1 200, de los cuales Ulises aportó $498 y Adriana $702.
   En una tabla registraron los precios con los que van a revender los libros; cada uno debe elegir aquellos que les permitan obtener la ganancia que les corresponde, de manera proporcional a lo que cada uno invirtió.

   ¿Qué libros le corresponden a Ulises?

   a) *Meditaciones metafísicas* y *La náusea*
   b) *Mecánica hidráulica* y *Cien años de soledad*
   c) *Historia de la fealdad* y *Meditaciones metafísicas*
   d) *Mecánica hidráulica* y *La náusea*

Título	Precio
Meditaciones metafísicas	$307
Mecánica hidráulica	$450
Cien años de soledad	$391
Historia de la fealdad	$523
La náusea	$329

2. En el centro del jardín de una casa se colocará un patio que será adornado con adoquines de forma hexagonal, como los que se muestran. Si el área del patio es de 2.6 m^2, ¿cuántos adoquines serán necesarios para cubrirlo todo?



a) 42 b) 63 c) 28 d) 69

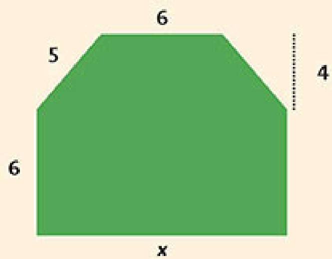
3. En una plaza comercial se construyó un área de comida de forma circular con ocho locales del mismo tamaño, como muestra la imagen. Las paredes contiguas de los locales miden 3.91 m. La cadena de comida "Tacos Hermanos" rentará dos locales para colocar todo lo necesario para la venta: cocina, mostrador, mesas, sanitario, etc. ¿Cuántos metros medirá el frente de los dos locales?

a) 12.27 m b) 6.13 m c) 13.95 m d) 16.5 m

4. Jorge obtuvo 8.5 de promedio final en el curso de Matemáticas. Para obtener la calificación, la profesora promedió la calificación de dos exámenes. En el primer examen, obtuvo 1.4 puntos más que en el segundo. De los dos exámenes, ¿cuál fue la mejor calificación de Jorge?

a) 8.5 b) 7.8 c) 9.9 d) 9.2

5. Yolanda necesita pintar la fachada de su casa. Hizo un dibujo de la fachada para obtener el área y así calcular la cantidad de pintura que comprará. Olvidó medir la base de la fachada; sin embargo, escribirá una expresión para el área, de tal manera que cuando tenga la medida de la base, sea más rápido calcular el área.



¿Cuál de las siguientes expresiones no representa el área de la figura?

a) $8x + 28$

b) $6x + 4\left(\frac{6 + x}{2}\right)$

c) $8x + 12$

d) $2x + 12 + 6x$

6. En la siguiente tabla se muestra el consumo de energía eléctrica, por hora por persona, en algunos países del continente americano durante el año 2014. Los datos fueron extraídos de la página del Banco Mundial y están redondeados a décimos. En el caso de México, el consumo por persona equivale a mantener 21 focos de 100 watts encendidos al mismo tiempo ininterrumpidamente durante un año.

Consumo de energía eléctrica en 2014	Kilowatts por hora (kWh) per cápita
México	2.1
EUA	13
Argentina	3.1
Brasil	2.6
Chile	3.9
Uruguay	3.1
Venezuela	2.7

Con base en los datos de la tabla, ¿cuál es la desviación media?

a) 4.357 b) 3.1 c) 2.41 d) 1.257

7. Al visitar su casa de campo, la familia Sandoval se encuentra con que la alberca está vacía y para llenarla requieren de 500 galones de agua. Para ello, utilizarán el agua de su tinaco, el cual tiene una capacidad de 1 m^3. ¿Cuántos tinacos necesitan para llenar la alberca?

a) 2.5 tinacos b) 1.8 tinacos c) 3.2 tinacos d) 0.8 tinacos

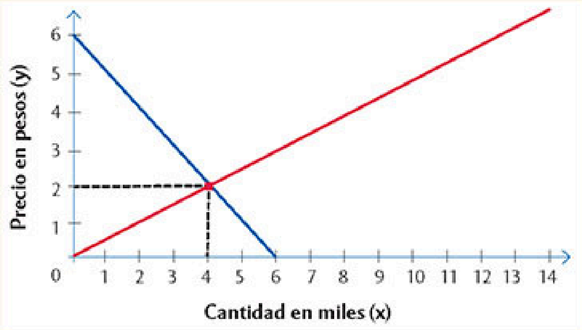
8. Óscar cortó un vidrio cuadrado de 5 m^2 de área. Si quiere poner una tira de aluminio en todo su contorno, ¿cuánto aluminio necesita?

a) 20 m b) 11.2 m c) 8.96 m d) 9.66 m

9. Resuelve las operaciones cruzadas del siguiente recuadro.

$\frac{1}{4}$	$+$	$-\frac{1}{2}$	$\times$	4.5	$=$					
$\times$						$\times$				
-0.75	$\times$	$\frac{8}{3}$	$=$			$-\frac{3}{4}$				
$\div$		$\times$		$\times$		$\times$				
$-\frac{6}{12}$		$-\frac{6}{2}$		1.125	$+$	-3.6	$\times$	$\frac{5}{144}$	$=$	
$=$		$=$		$\div$		$=$				
			$\times$	$-\frac{5}{8}$	$\div$		$=$			
				$=$						

10. La economista de una empresa que fabrica jabones diseñó una gráfica de oferta-demanda para el producto más importante que elaboran. La línea roja representa la oferta y la azul la demanda. El punto donde se intersecan las líneas se llama punto de equilibrio y le sirve a la empresa para guiarse tanto en la cantidad (en miles) de jabones que debe producir, como en el precio (en pesos) al que debe venderlo.



De los siguientes sistemas de ecuaciones, ¿cuál representa a las gráficas anteriores?

a) $0.5x - y = 0$
$x + y = 6$

b) $0.5x - y = -3$
$x + y = 6$

c) $0.5x - y = 0$
$x + y = -6$

d) $0.5x + y = -3$
$x + y = 6$

Mide tu avance

En grupo, califiquen su examen. Después, anota tus resultados en la siguiente tabla.

En caso de que tu respuesta no haya sido correcta, regresa a la lección y las páginas que se sugieren para repasar el contenido.

Reactivo	Contenido	Respuesta	Sugerencia
1	Resuelvo problemas de reparto proporcional.		Lección 11, página 112
2	Calculo el perímetro y el área de polígonos regulares.		Lección 15, página 152
3	Resuelvo problemas de cálculo del perímetro del círculo.		Lección 15, página 152
4	Resuelvo problemas de sistemas de ecuaciones lineales 2×2.		Lección 12, página 118
5	Identifico expresiones algebraicas equivalentes para representar el área de figuras geométricas.		Lección 13, página 132
6	Calculo la desviación media de un conjunto de datos.		Lección 16, página 160
7	Realizo conversiones entre unidades del SI y del sistema inglés.		Lección 14, página 144
8	Resuelvo problemas de aproximaciones a raíces cuadradas.		Lección 10, página 104
9	Resuelvo multiplicaciones de números enteros, fracciones y decimales, positivos y negativos.		Lección 9, página 96
10	Resuelvo gráficamente un sistema de ecuaciones lineales 2×2.		Lección 12, página 100

Periodo 3

En este periodo abordarás los siguientes aprendizajes esperados:

- Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.
- Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.
- Calcula el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.
- Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.
- Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

En este último periodo podrás consolidar algunos de los temas vistos en los periodos anteriores y en algunos otros; además, ampliarás tus conocimientos sobre los mismos.

Aprenderás:

- a aplicar tu criterio para elegir el tipo de número más adecuado en divisiones que combinan fracciones y números decimales;
- a representar cantidades muy grandes y muy pequeñas por medio de la notación científica;
- lo que sucede con la gráfica de dos magnitudes que se relacionan proporcionalmente de manera inversa;
- a justificar y aplicar la fórmula para calcular el área del círculo;
- a calcular el volumen de prismas rectos, cuya base son polígonos, y de cilindros; también, reafirmarás tus conocimientos sobre las relaciones entre las unidades de volumen y de capacidad;
- a analizar las características de la probabildiad teórica al realizar un experimento aleatorio y la compararás con la probabilidad frecuencial, con el fin de tomar las mejores decisiones al realizar un experimento aleatorio.

Conviene que con tus compañeros reflexiones sobre los contenidos que conoces y analices algunos problemas que no puedan resolver con estos contenidos. Todo esto con el fin de que puedas ubicarte en esas épocas en las que el conocimiento no alcanzaba y había que ser creativos.

Las potencias de 10, por ejemplo $10^6 = 1\,000\,000$, nos brindan la oportunidad de escribir cantidades grandes. Muchas de las cantidades relacionadas con el Sistema Solar representan cifras muy extensas que se pueden simplificar, por ejemplo, la masa de la Tierra es igual a 5.97×10^{24} kg. A lo largo del periodo 3 entenderás este tipo de notación.

Eje: Número, álgebra y variación • **Tema:** Multiplicación y división • **Aprendizajes esperados:** Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos. Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.

L17 Multiplicar y dividir decimales

COMENZAMOS

Reflexiona y discute

Intercambios: multiplicaciones y divisiones de decimales

Lee la siguiente información. Después, realiza lo que se pide.

1. Paco realiza un viaje de trabajo por varios países y lleva 2 700.70 dólares (USD) para comprar algunos encargos que le hicieron varias personas. Cuando salió de viaje, el cambio por dólar era de 19.75 pesos mexicanos (MXN) a la compra.
   a) ¿Cuánto dinero, en pesos mexicanos, representa la cantidad de dólares que lleva Paco?

      ¿Cómo obtuviste la respuesta? ______
   b) ¿Habrá otra forma de llegar al resultado correcto? Explícalo. ______
   c) Paco tenía 5 750 MXN para cambiar por dólares. ¿Cómo puede saber cuántos dólares

      puede comprar? ______
   d) ¿Cuántos dólares exactos puede comprar con esos pesos? ______
   e) ¿Cuántos dólares llevaba en total al viaje? ______

2. La primera visita de Paco fue a Perú, cuya moneda es el nuevo sol (PEN), en ese momento cada dólar valía 3.6 PEN.
   a) Los encargos que Paco compró en ese país le costaron 2 214.75 PEN. ¿Cuántos dólares

      gastó en esas compras? ______
   b) Después fue a Costa Rica, en donde un dólar era equivalente a 566.35 colones costarricenses (CR). Al comprar algunos encargos en este país gastó 279 268.25 CR, ¿cuántos dólares gastó en esas compras? ______
   c) El último país que visitó fue Nicaragua, país cuya moneda es el córdoba nicaragüense (NIO). En ese momento, cada dólar era equivalente a 31.07 NIO. Si Paco gastó 25 417.50 NIO, ¿cuántos dólares gastó en este país? ______
   d) Al regresar a México, el tipo de cambio del dólar a la compra estaba en 17.25 MXN por dólar. Si en el aeropuerto cambió los dólares que le sobraron por pesos, ¿cuántos pesos recibió en total? ______

3. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. En caso de que existan diferencias, revisen sus procedimientos en busca de posibles errores.

Operaciones que involucran números decimales

En pareja, lean la información. Después, resuelvan lo que se pide.

1. Las multiplicaciones o divisiones de números decimales se usan con mucha frecuencia en la vida diaria. Analicen las siguientes situaciones.
   Pablo tiene $380.50 que invirtió para obtener un dinero extra; él espera obtener una ganancia adicional de una cuarta parte más del dinero invertido.

   a) ¿Cuánto dinero espera obtener Pablo en total? ______
   b) Escriban dos formas de obtener el resultado, pero una de ellas que se pueda calcular sólo con una operación. ______

2. Una persona invierte en un negocio $4 321.50 y gana $6 050.10 en total.

   a) ¿Qué porcentaje de la cantidad original recibió de ganancia? ______
   b) Escriban dos formas de obtener el resultado, pero una de ellas que se pueda calcular sólo con una operación. ______

3. Una persona facturó una compra de materiales diversos y le cobraron $5 349.34, incluido el IVA (16% de impuestos).
   a) Escriban dos formas de conocer lo que le cobraron de IVA.
   ______
   b) ¿De cuánto fue la compra sin incluir el IVA? ______

4. Comparen sus respuestas con otras parejas. Discutan sus procedimientos y cómo diferentes caminos permiten llegar al mismo resultado.

TAREA

Completa la siguiente tabla de acuerdo con el tipo de cambio que se proporcionó en la actividad anterior.

Considera: 1 USD = 17.25 MXN = 566.35 CR = 31.07 NIO = 3.6 PEN.

Moneda	MEX	PEN	CR	NIO	USD
De MXN a...	18 450.75	3 850.59			
De PEN a...	1 1772.1	2 456.80			
De CR a...			450 657.99		
De NIO a...				57 987.05	
De USD a...					3 500.25

Multiplicaciones y divisiones de decimales y fracciones

En equipo, resuelvan los siguientes problemas.

1. Lorena fue al supermercado y compró $1\frac{1}{4}$ de plátanos, cuyo kilogramo cuesta $4.70.

   a) ¿Cuánto debe pagar? ______________________________

   b) Escriban dos formas de obtener el resultado, pero una de ellas que se pueda calcular únicamente con una operación. ______________________________

   c) Si Lorena tiene $49.40, ¿cuántos kilogramos puede comprar de plátanos? __________

2. Supongan que tienen una calculadora que no puede marcar números decimales, porque no le sirve el botón del punto, pero puede realizar operaciones con fracciones.

   a) Si requieren resolver la operación: $23.56 \times \frac{3}{4}$, ¿cómo lo harían?, considerando lo anterior. ______________________________

   b) En estas condiciones, expliquen cómo pueden hacer la operación y realícenla a mano.

   ____

   c) Si tienen una calculadora que no hace operaciones con fracciones, expliquen cómo calcularían $33.65 \times \frac{7}{9}$ y realicen la operación a mano. ______________________________

   ____

   d) Bajo las mismas circunstancias anteriores, expliquen cómo calcularían: $18.25 \div \frac{3}{4}$ y realicen las operaciones a mano.

   ____

3. En ocasiones las calculadoras y algunas herramientas de cálculo permiten hacer operaciones solamente con decimales y números enteros. Realicen las siguientes operaciones bajo estas condiciones y analicen si hay otras formas de encontrar el resultado.

   ____

   a) $72.35 \div \frac{3}{5} =$ ______________   c) $95.04 \div \frac{2}{3} =$ ______________

   b) $\frac{9}{11} \div 7.25 =$ ______________   d) $\frac{5}{8} \div 12.3 =$ ______________

4. Discutan con otros equipos cuál es la forma más sencilla de realizar las operaciones anteriores. Registren sus acuerdos en el siguiente espacio y valídenlos con su profesor.

   ____

5. Determinen cuál o cuáles de los procedimientos de las siguientes operaciones representan los resultados correctos y argumenten su respuesta. Señalen las operaciones con una ✓ o con un ✗.

a) $73.04 \times \frac{3}{4} = 54.78$ $\qquad$ $73.04 \times \frac{3}{4} = \frac{2\,739}{50}$

$73.04 \times \frac{3}{4} = 53\,\frac{39}{50}$

b) $45.28 \div \frac{3}{4} = 60.373$ $\qquad$ $45.28 \div \frac{3}{4} = \frac{4\,528}{75}$

$45.28 \div \frac{3}{4} = 60 + \frac{28}{75}$

c) En algunas calculadoras que utilizan fracciones, cuando pones los datos de la operación, la transforma en $73.04 \times \frac{3}{4} = \frac{73.04 \times 3}{4}$, ¿es correcto?, ¿por qué?

____

d) Hay calculadoras que, al hacer operaciones de multiplicación o división de números decimales, convierten las fracciones a números decimales. ¿Consideran que esta forma es adecuada? ______________________________

e) ¿Sería mejor cambiar los decimales a fracciones y operar las multiplicaciones y divisiones como fracciones? ______________________________

APRENDEMOS

Las operaciones de multiplicación y división de números decimales, y de números decimales con fracciones, pueden realizarse de varias formas. Por ejemplo, convirtiendo todos los números implicados a la misma forma, como es el caso de la siguiente operación.

$7.23 \times \frac{2}{5} = 7.23 \times 0.40 = 2.892$ $\quad$ o $\quad$ $7.23 \times \frac{2}{5} = \frac{723}{100} \times \frac{2}{5} = \frac{1\,446}{500} = \frac{723}{250}$

$8.25 \times \frac{3}{4} = 8.25 \div 0.75 = 11$ $\quad$ o $\quad$ $8.25 \div \frac{3}{4} = \frac{33}{4} \div \frac{3}{4} = 11$

Trabajar con este tipo de operaciones con decimales y fracciones puede ser confuso.

Por ejemplo: $4.17 \times \frac{5}{3} = 4.17 \times 1.666\ldots$; en este caso sería mejor: $4.17 \times \frac{5}{3} = \frac{20.85}{3} = 6.95$.

Otro ejemplo: $7.25 \div \frac{3}{4} = 7.25 \div 0.75 = 9.6666\ldots$, o $7.25 \div \frac{3}{4} = \frac{29}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{29}{3}$.

Por ello, en las calculadoras u otros instrumentos para realizar cálculos se configura el tipo de resultados que se desea, aproximados (números decimales) o exactos (fracciones), aunque al trabajar con ambas configuraciones los resultados pueden ser exactos.

La situación y el análisis que se haga de las cantidades implicadas es de gran ayuda para elegir el mejor método.

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Determina estimaciones del resultado de las siguientes operaciones y escríbelas con el tipo de número que mejor consideres.

$9.43 \div 2.25 = \square$ $115.75 \div 11.25 = \square$ $2\,001.43 \div 101.75 = \square$

$10.26 \div \frac{1}{2} = \square$ $2.25 \div \frac{1}{4} = \square$ $5.60 \div \frac{3}{2} = \square$ $9.33 \div \frac{1}{3} = \square$

2. Ahora realiza cada operación y evalúa si las estimaciones que planteaste son pertinentes.

Conocer una estimación del resultado te ayuda a conocer de antemano si la operación se realizó correctamente.

Operar con decimales y fracciones

En pareja, lean la información. Después, resuelvan las actividades.

Como en el caso de las operaciones con fracciones positivas y negativas, las operaciones con decimales se realizan de la misma manera, aplicando las reglas para multiplicar y dividir números positivos y negativos que estableciste antes. Si es necesario, regresa a la página 104 para recordarlas.

1. Apliquen las reglas para realizar las siguientes operaciones.

a) $(27.18) \times (\frac{3}{2}) = \square$

b) $\left(\frac{-4}{7}\right) \times (-13.7) = \square$

c) $7.5 \div (-\frac{1}{9}) = \square$

d) $(-1.19) \div \frac{2}{8} = \square$

e) $4.5 \div (-\frac{2}{5}) = \square$

f) $(-17.17) \div \frac{15}{17} = \square$

g) $(37.98) \times (\frac{7}{11}) = \square$

h) $(-\frac{3}{4}) \times (-3.6) = \square$

2. Describan el procedimiento que siguieron para resolver las operaciones.

a) ¿Con qué tipo de números operaron? ______________________________

____

b) ¿Cuándo conviene operar con fracciones y cuándo con números decimales? ________

____

3. Realicen la siguiente operación y compruébenla a partir de la relación entre la multiplicación y la división.

   a) Mariana dividió $-4.8 \div (-2.2)$ y obtuvo $\frac{48}{22}$. ¿Qué procedimiento siguió Mariana?

   ____

   b) ¿Es correcto el resultado que obtuvo? ______________________________

4. Resuelvan las siguientes divisiones y anoten sus procedimientos en su cuaderno.

   a) $(-5.15) \div (-0.25)=$ ______ b) $-4.5 \div (0.5)=$ ______ c) $(5.18) \div (-4.6)=$ ______

5. Respondan lo siguiente y realicen los cálculos en su cuaderno.

   a) En la operación $\left(7.5 \div \left(-\frac{1}{9}\right)\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)$, ¿con qué números conviene operar?, ¿por qué?

   ____

   b) ¿Cuál es el resultado de la operación? ______________________________

6. Determinen si en las siguientes operaciones se debe aplicar la jerarquía de operaciones o se pueden resolver como están escritas. Después, modifiquen la posición de los paréntesis y analicen su efecto en el resultado.

   a) $\left(\left(-1.19\right) \div \frac{2}{7}\right) \div \left(\left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-6.6\right)\right) = \boxed{}$

   b) $\left(\left(-5.99\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right)\right) \times \left(2.35 \div \left(-\frac{2}{9}\right)\right) = \boxed{}$

   c) $\left(\left(\left(-1.19\right) \div \frac{2}{7}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right)\right) \times \left(-2.6\right) = \boxed{}$

7. Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Discutan los procedimientos para dividir fracciones y comenten situaciones en las que las pueden aplicar. Escriban sus conclusiones.

   ____

   ____

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente pregunta. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero te dice que el signo del resultado de la siguiente operación es negativo porque todos los números son negativos, ¿qué le dirías?

   $\left(\left(-7.5 \div \left(-\frac{1}{9}\right)\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \div \left(-\frac{12}{17}\right) = \boxed{}$

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Resuelve las siguientes situaciones.
   a) Si 1 L de aceite de auto cuesta \$13.75 y un máquina usa 20.35 L, ¿cuánto dinero se gastará en ponerle el aceite necesario a la máquina? ______
   b) Si por cuatro días de trabajo a Pedro le pagan \$896.75, ¿cuánto le pagarán por $7\frac{1}{2}$ días de trabajo? ______
   c) Un nadador da seis vueltas a un alberca cada 3.72 minutos. Si tiene que dar 40 vueltas y nada de manera constante, ¿cuánto tiempo tardará? ______
2. Calcula las medidas que faltan en cada rectángulo.

Ancho = 12.75 m Largo = ______ Área = 167.79 m²	Ancho = ______ Área = 48.645 m² Largo = 5.75 m

3. Escribe dos decimales que den los siguientes productos.

a) (______) × (______) = 0

b) (______) × (______) = −5

c) −(______) ÷ (______) = −3

d) (______) × (− ______) = −1

e) (______) × (− ______) = 4

f) (______) ÷ (______) = −2

4. Resuelve las siguientes situaciones.
   a) Un buzo descendió 38.5 m, es decir, −38.5 m considerando el nivel del mar como punto de referencia, a un ritmo constante. Si tardó 3.4 min en su inmersión, ¿a qué distancia del nivel del mar se encontraba después de un minuto? ______
   b) Si por tres días de trabajo le pagan a Susana \$750.25, ¿cuánto debe trabajar para que le paguen \$3 700.00? ______
5. Plantea un problema que pueda resolverse con las siguientes operaciones.

a) 10.26 ÷ 4.12 = ______

______

b) $5.25 \div \frac{3}{4} =$ ______

______

6. Encuentra los números con extensión decimal en cada operación para que el resultado sea correcto.

a) $(3.54) \times (\_\_\_\_\_\_) = 8.85$

b) $(-3.2) \div (\_\_\_\_\_\_) = 1.44$

c) $(\_\_\_\_\_\_) \times (-4.43) = -11.075$

d) $-1.4365 \div \_\_\_\_\_\_ = 0.65$

7. Realiza los siguientes cálculos.

a) $6.57 \div \left(\frac{-21}{93}\right) \times \left(\frac{-(3.3)}{5}\right) =$ ______

b) $\left(\left(-1.19\right) \div 1.19\right) \div \left(\left(\frac{-3}{2}\right) \times \left(-1.5\right)\right) =$ ______

c) $((-5) \times \left(\frac{-2}{5}\right)) \times (2.3 \div (-2.3)) =$ ______

d) $(((-1.19) \div 1) \div (-1)) \times (-2.6 + 2.6) =$ ______

8. Resuelve.

En una casa de bolsa obtuvieron +154.25 puntos en cierto periodo de un día. Si posteriormente obtuvieron 12 veces seguidas −12.5 puntos, ¿obtuvieron ganancias o perdidas?

¿De cuántos puntos? ______

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Utiliza una hoja de cálculo electrónica para hacer operaciones que combinen fracciones y números decimales.
   a) Escribe fracciones y decimales, positivos y negativos. En el caso de las fracciones da formato de fracción a las celdas.
   b) Elige otras celdas y utiliza las fórmulas de multiplicación y de división.

   - Por ejemplo, para multiplicar números en las celdas A1 y B1, escribe: =A1*B1, en cualquier celda.
   - Y para dividir, escribe: =A1/B1.

E1 = (-A1)*(B1)/C1/(-D1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	3.2	4/5	4.7	3/7	1.27092199	1 191/705	3.2
2							
3							
4							
5							

Eje: Número, álgebra y variación • Tema: Multiplicación y división • Aprendizajes esperados: Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.

L18 Notación científica

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Números muy grandes y muy pequeños

Lee la información. Después, resuelve lo que se solicita.

1. Existen cantidades muy grandes o muy pequeñas que requieren muchas cifras para representarse, como muestran los siguientes ejemplos:

La masa de la Tierra es de, aproximadamente, 5 973 600 000 000 000 000 000 000 kg.
La masa de Júpiter es 318 veces mayor que la de la Tierra, es decir, aproximadamente, 1 899 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

a) Comprueba lo anterior, usando tu calculadora. ¿Pudiste realizar la operación? Si fue así, ¿cómo apareció la cantidad final representada en la pantalla?

____

b) Si no pudiste realizar la operación en la calculadora, ¿cómo puedes validar la relación entre la masa de los planetas? ______________________

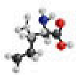
c) ¿Habrá alguna manera de simplificar los cálculos y las cantidades?

____

d) El número de estrellas en el universo visible es de 1 000 000 000 000 000 000 000.

¿Cuál es la potencia de 10 que representa esta cantidad? ______________________

2. En contraste, algunas bacterias, virus y moléculas, miden menos de una millonésima parte de un metro (0.000001 m). En algunos casos, se representan en micrómetros (µm): 1 µm = 0.00001 m; o en nanómetros (nm): 1 µm = 1 000 nm, como puedes observar en los siguientes ejemplos.

	Molécula  Bacteria 	Virus 		Célula vegetal 
Tamaño en metros expresado como fracción	$\frac{1}{1000000000}$	Entre $\frac{1}{1000000000}$ y	$\frac{1}{100000000}$	$\frac{1}{1000000}$
Tamaño en metros expresado con potencias de 10	10^{-9}	10^{-9}	10^{-8}	10^{-6}

a) ¿Cuánto mide una célula animal en metros? ______________________

b) ¿Cuánto mide una célula vegetal? ______________________

3. Discute con tus compañeros lo siguiente: ¿cómo pueden escribir números muy grandes o muy pequeños de manera simplificada? Por ejemplo, aquéllos que ocupan en su escritura muchos ceros.

Aprende y aplica

SIGAMOS ADELANTE

Operaciones con potencias de 10

En equipo, resuelvan las siguientes actividades.
Seguramente, ya conocen algunas propiedades del número 10, así como obtener el resultado de operaciones de números que son potencias de 10; si no es así, realicen las operaciones necesarias para resolver las siguientes situaciones.

1. Multipliquen y dividan las siguientes cantidades por: 100, 10 000 y 10 000 000.

Número	× 100	× 10 000	× 10 000 000	÷ 100	÷ 10 000	÷ 10 000 000
7						
24						
381						
0.7						
0.89						
0.003						

a) ¿Qué estrategia siguieron para multiplicar?

____

b) ¿Qué estrategia siguieron para dividir? _______________

____

2. Resuelvan las siguientes multiplicaciones.

a) 10 × 10 = _______________ b) 10 × 10 × 10 × 10 = _______________

c) 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 = _______________
d) 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 =

____

e) ¿Cómo realizarían la multiplicación: 10 × 10 × 10 por 10 × 10 × 10 × 10 × 10?

____

f) ¿El resultado sería el mismo que multiplicar 1 000 por 100 000? Justifiquen su respuesta.

____

3. Redacten algunas reglas que se puedan utilizar para encontrar el resultado de este tipo de operaciones, sin ejecutar la operación.

____

____

4. Respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo realizarían la división: $10 \times 10 \times 10 \div 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$?

   b) ¿El resultado sería el mismo que dividir 1 000 entre 100 000? Justifiquen su respuesta.

5. Redacten algunas reglas que se puedan utilizar para encontrar el resultado de este tipo de divisiones, sin ejecutar las operaciones.

6. Comenten sus reglas con las de otros compañeros. Si existen diferencias, discútanlas y lleguen a acuerdos.

Potencias de 10

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.
Como ya saben, una potencia con exponente cero es igual a 1, por ejemplo: $10^0 = 1$; y todo número con exponente uno es igual al mismo número, es decir, $10^1 = 10$.

1. Completen la siguiente tabla que muestra potencias de 10.

Potencia	Multiplicación	Resultado	Potencia de 10
segunda	10×10		10^2
tercera	$10 \times 10 \times 10$		
cuarta	$10 \times 10 \times 10 \times 10$		
quinta	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		
sexta	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		
séptima	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		
octava	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		
novena	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		
décima	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$		

   a) Representen la multiplicación de los incisos e y f de la actividad 2 de la página anterior con potencias de 10: ____________________
   b) Representen la división de los incisos a y b de la actividad 4 con potencias:

2. Con operaciones como las que se han resuelto en la sección anterior es sencillo realizar algunos cambios en los números o cifras, u operar con ellos.

a) ¿Con qué operaciones podrían convertir 12 345.6789 a 12 345 678.9 y a 12.3456789?

____

b) ¿Cómo expresarían 123 400 000 000 como una multiplicación de 123.4 por otra cantidad? ¿Cómo lo harían usando potencias de 10? ______________

____

c) ¿Cómo se puede pasar del número 23.58 al número 0.02358 y al número 0.000002358?

____

d) Resuelvan lo anterior con potencias de 10: ______________

e) ¿Cómo expresarían el número 0.000059302 como una multiplicación del número 593.02 por otra cantidad? ¿Cuál es esa cantidad? ______________

f) ¿Cómo representarían al número 0.0000001 como una potencia de 10 con un exponente negativo? ______________

3. Completen las siguientes operaciones, primero por un número natural, después por una potencia de 10.

a) 16 000 000 = 1.6 × ______________ = 1.6 × ______________

b) 1 384 800 000 000 = 1.3848 × ______________ = 1.3848 × ______________

4. Discutan y escriban qué procedimiento podrían seguir para representar números muy pequeños como: 0.000023 y 0.00000000459, como un número decimal por una potencia de 10 con exponente negativo.

____

____

a) Completen las siguientes operaciones, aplicando el procedimiento que describieron.

Número	Por un número decimal	Por una potencia de 10
0.000023	2.3 ×	2.3 ×
0.00000000459	4.59 ×	4.59 ×

5. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otras parejas. En caso de que existan diferencias, discútanlas para llegar a acuerdos; si es necesario, utilicen su calculadora para validar sus respuestas.

APRENDEMOS

La notación científica es un recurso que se usa para expresar números muy grandes o muy pequeños o para simplificar cálculos. Esta representación consiste en escribir un número igual o mayor que 1 y menor que 10 por una potencia de 10. Por ejemplo, el número 125 000 000 en notación científica se representa como: 1.25×10^{8}.

Otro ejemplo: 769 800 000 000 000 000 = 7.698×10^{17}.

También, se utiliza para representar números muy pequeños, por ejemplo:

0.00000000379, se representa como: $3.79 \times \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 3.79 \times \frac{1}{10^{9}} = 3.79 \times 10^{-9}$

Otro ejemplo: 0.000000000000105 = 1.05×10^{-13}.

Recuerda que los lugares que se mueve el punto decimal (a la izquierda o a la derecha) indican el signo, positivo o negativo, de la potencia de 10 por la que se multiplica.

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Retoma la información de la actividad con la que inicia la lección y representa las siguientes cantidades en notación científica.
   a) La masa de la Tierra es, aproximadamente, 5 973 600 000 000 000 000 000 000 kg.

      Notación científica: ____________________

   b) La masa de Júpiter es de 1 899 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

      Notación científica: ____________________

   c) Una molécula tiene 0.0000000016 m

      Notación científica: ____________________

   d) Un virus mide 0.00000285 μm

      Notación científica: ____________________

2. Escribe las siguientes cantidades, representadas en notación científica, como números naturales o números con extensión decimal, según corresponda.

   a) 4.07×10^{14} = ____________________

   b) 7.0876×10^{11} = ____________________

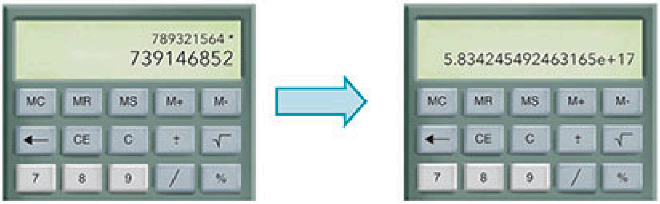
   c) 1.056×10^{17} = ____________________

   d) 3.19×10^{-6} = ____________________

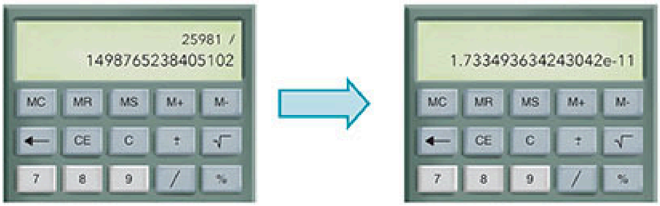
   e) 9.056×10^{-12} = ____________________

Con la calculadora

Utiliza tu calculadora para resolver las siguientes actividades.
Las calculadoras emplean la notación científica. Por ejemplo, la pantalla de la izquierda representa una multiplicación y la de la derecha el resultado en notación científica.
Lo anterior se interpreta como: 5.834245492463165e + 17 que es igual a:
$5.834245492463165 \times 10^{17}$



En este segundo caso se muestra una división, que la calculadora muestra como 1.733493634243042e −11; que es igual a: $1.733493634243042 \times 10^{-11}$.



1. Los siguientes resultados se obtuvieron de una calculadora; escríbelos en notación científica y como números naturales y decimales, según corresponda.

   a) 7.64534e+10 = ____________________

   b) 6.987e+13 = ____________________

   c) 8.42463e−9 = ____________________

   d) 9.0901e−19 = ____________________

2. Utiliza tu calculadora para validar que tus respuestas sean correctas. En caso contrario, revisa el procedimiento en busca del error.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero. responde.

1. Si un compañero te dice que 567 000 000 se representa en notación científica como: 56.7×10^7, ¿qué le dirías?
2. ¿Es correcto representar 0.0000786 como 786×10^{-4}? ¿Por qué?

Tic

La **notación científica** que se utiliza en calculadoras implica usar una expresión que consta de tres partes: un número que puede ser un **número** con una sola cifra en su parte entera; una **letra E o e**, de acuerdo con el modelo y marca de la calculadora, seguida de un signo + o −, y un **número natural**. Se utiliza para simplificar la representación de la denominada **notación exponencial**, que consta de otro tipo de escritura que no necesariamente puede representarse en muchas calculadoras y consta de un **número entero o decimal**; el signo de multiplicación y una **potencia de 10**, con exponente entero. Así: 1.24E+8, es lo mismo que 1.24e+8 o que 1.24×10^8; también: 4.56E−15, 4.56e−15 y 4.56×10^{-15}, que representan la misma cantidad.

CONCLUIMOS **Crea y evalúate**

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Retomando los datos al inicio de la lección, la masa de la Tierra es de, aproximadamente, 5.9736×10^{24} y el número de estrellas en el universo visible es 1×10^{21}.
   a) La distancia de la Tierra a la Luna es de 380 000 km. ¿Cómo se representa esta distancia en notación científica? ______________________
   b) Si la distancia entre dos planetas es de 550 000 000 km. Escribe esta distancia en notación científica: ______________________

2. Completa la tabla de las distancias de los planetas con respecto al Sol con números naturales.

Planeta	Distancia media al Sol en notación científica (km)	Distancia media al Sol (km)
Mercurio	5.787×10^7	
Venus	1.0814×10^8	
Tierra	1.495×10^8	
Marte	2.279×10^8	
Júpiter	7.783×10^8	
Saturno	1.43×10^9	
Urano	2.873×10^9	
Neptuno	4.498×10^9	

3. Represента en notación científica los siguientes números.

   a) 609 000 000 000 000 000 = ______________________

   b) 8 124 000 000 000 = ______________________

   c) 0.000000000000143 = ______________________

   d) 0.00000000000000076 = ______________________

4. La bacteria de la pleuroneumonía tiene una longitud de 0.0000012 cm.

a) Expresa esa longitud en metros: ______________________

b) Expresa esa longitud en notación científica: ______________________

5. Un avión toma una fotografía desde una altura de 3.42×10^3 metros. ¿A qué altura en metros se tomó la fotografía? ______________________

6. Averigua cuántas veces es mayor la distancia de la Tierra al Sol que de la Tierra a la Luna. Realiza las operaciones en notación científica.

____

7. La medida de una bacteria de tamaño intermedio es de unos 0.003 mm, pero los virus son todavía más pequeños, por ejemplo, el de la poliomelitis mide 0.000015 mm. Determina el número de virus de la poliomelitis que habría que unir para igualar la longitud de una bacteria común. Realiza los cálculos en notación científica. ________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En una hoja de cálculo electrónica puedes trabajar con cantidades en notación científica.

a) En la columna escribe números decimales menores que 10...

b) En la columna B, multiplica los números de la columna A por una potencia de 10. En la celda B1 escribe, por ejemplo: =A1*10^6 y da enter. Después, arrastra el cursor hacia abajo.

B1 fx =A1*10^6

	A	B
1	2.654	2654000
2	4.2	
3	1.98	
4	8.07	
5	7.2	
6		
7		

c) Repite lo anterior en la columna C con una potencia más grande de 10. Repite lo anterior para potencias negativas,en otras columnas, usando fórmulas como la siguiente: =A1*10^−2.

d) También puedes operar con las cantidades en notación científica, puedes multiplicarlas o dividirlas. Por ejemplo, usa la fórmula: =C1*D1.

2. Utiliza la herramienta para resolver los problemas 6 y 7 de la sección anterior.

C1 fx =A1*10^12

	A	B	C
1	2.654	2654000	2.654E+12
2	4.2	4200000	4.2E+12
3	1.98	1980000	1.98E+12
4	8.07	8070000	8.07E+12
5	7.2	7200000	7.2E+12
6			
7			
8			

D1 fx =B1*C1

	A	B	C	D
1	2.654	2654000	2.654E+12	7.04372E+18
2	4.2	4200000	4.2E+12	
3	1.98	1980000	1.98E+12	
4	8.07	8070000	8.07E+12	
5	7.2	7200000	7.2E+12	

Eje: Número, álgebra y variación • **Tema:** Funciones • **Aprendizaje esperado:** Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con estos tipos de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

L19 Gráficas de proporcionalidad inversa

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

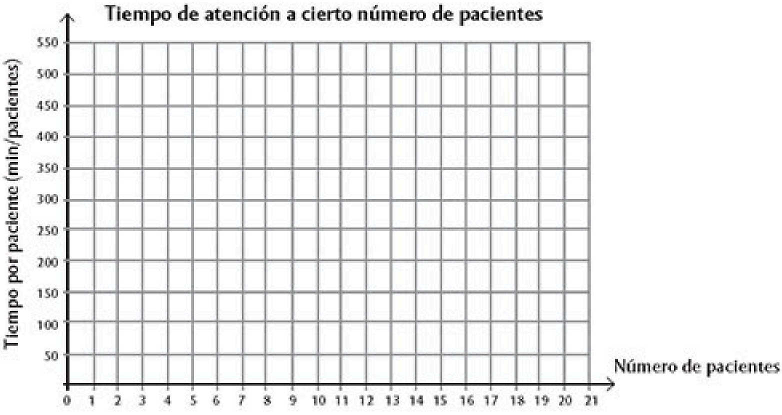
Tiempo en la consulta médica

Lee la información. Después, resuelve lo que se pide.

1. En un hospital, un doctor administra el tiempo para atender a sus pacientes en función de las citas que tiene agendadas y trata de dedicarle el mismo tiempo a cada paciente. El doctor da consulta durante ocho horas diarias y cierto día atendió a 20 personas.
   a) Si a cada paciente le dedica, en promedio, el mismo tiempo, ¿en cuántos minutos atendió a cada uno? ______
   b) ¿Cuántos minutos le tomó atender a seis pacientes? ______
   c) Completa la tabla que muestra la relación entre el número de pacientes y los minutos que tardó el doctor en atenderlos.

Pacientes	2	5	8	13	17	19	20
Tiempo por paciente (min/pacientes)							

2. Construye la gráfica a partir de la información de la tabla.



   a) ¿Qué características tiene la gráfica? ______
   b) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______

3. Compara tus respuestas con las de un compañero. Comenten lo siguiente: ¿qué sucedería con el tiempo de atención si el número de pacientes aumenta o disminuye? ¿Qué tipo de relación representa ese caso? ¿Cómo sería la gráfica correspondiente?

Aprende y aplica

SIGAMOS ADELANTE

Si algo sube, otro baja

En pareja, retomen el problema de la actividad anterior y resuelvan lo que se pide.

1. Un día el doctor tenía agendados ocho pacientes, por lo que planeó dedicarles, aproximadamente, 60 minutos a cada uno. Al siguiente día, agendó 24 consultas y citó a los pacientes con 20 minutos de diferencia; por otro lado, cuando tiene 16 pacientes, le dedica, en promedio, 30 minutos a cada uno. Así planea sus días, de acuerdo con el número de citas que tiene.

   a) ¿Cuántos minutos representan el tiempo que trabaja por día el doctor? ____________

   b) Completen la siguiente tabla para determinar el tiempo de consulta, en minutos, por paciente de acuerdo con el número de citas.

Número de pacientes	48	32	24	19	12	10	9	6
Tiempo promedio de consulta (min/paciente)								
Total de tiempo (min)								

   c) Cuando se reduce el número de pacientes, ¿qué sucede con el tiempo que el doctor dedica a la consulta? ____

   d) ¿Será posible calcular el número de pacientes para ciertos periodos de tiempo de consulta? Completen la siguiente tabla.

Número de pacientes								
Tiempo promedio de consulta (min/paciente)	120	60	48	35	30	24	20	15
Total de tiempo (min)								

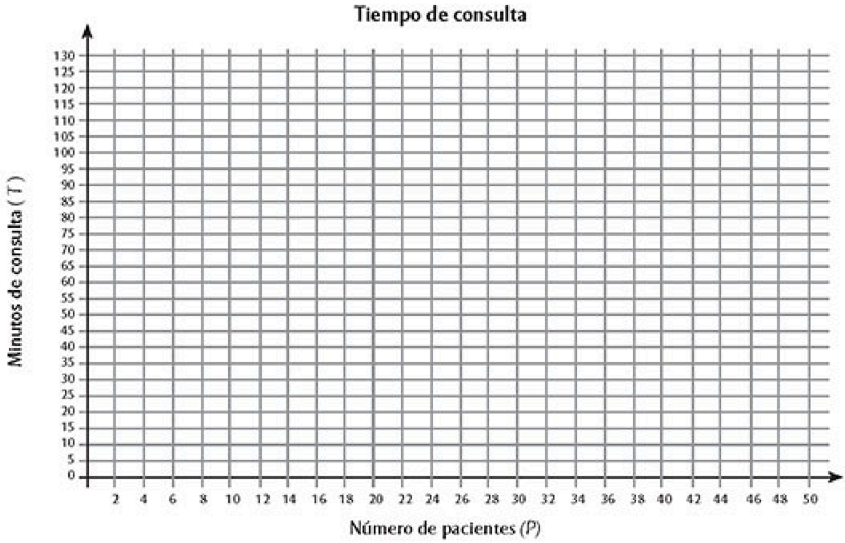
   e) Si P representa el número de pacientes y T representa el tiempo de consulta en minutos, ¿cuál debe ser el resultado del producto $P \times T$? ____________________

   f) Escriban una fórmula para obtener el tiempo de consulta si se conoce el número de pacientes: ____

   g) Escriban una fórmula para obtener el número de pacientes si se conoce el tiempo de consulta: ____

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. En el contexto del problema, ¿tiene sentido considerar números decimales en la primera fila? Comenten las características que tendrá la gráfica que represente la situación.

3. Consideren la información de las tablas de la página anterior y tracen la gráfica correspondiente en el siguiente plano. Marquen puntos que representen cada pareja de datos; después, unan los puntos para construir la gráfica.



a) ¿Qué características tiene la gráfica?

____

b) ¿Qué diferencia observan entre esta gráfica y la que construyeron en la actividad inicial?

____

c) Sin hacer cálculos, ¿pueden determinar el tiempo de consulta que corresponde a cierto número de pacientes a partir de la gráfica? Expliquen su respuesta.

____

____

d) ¿Cómo determinan el número de pacientes que puede atender el doctor, considerando el tiempo de consulta por paciente? ______________________________

____

4. Formen equipos y discutan lo siguiente: ¿tiene sentido considerar un tiempo cero de consulta para cierta cantidad de pacientes? ¿Es posible considerar cero pacientes y poder determinar tiempo de consulta en este caso? Registren sus acuerdos.

____

____

Medidas de un cuadrado y un rectángulo

En equipo, resuelvan la siguiente actividad.

1. Consideren un cuadrado cuyos lados miden 1 u.

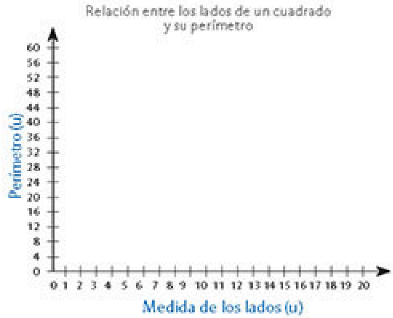
   a) ¿Cuánto mide su perímetro? ______________________

   b) ¿Qué sucede con el perímetro del cuadrado si la medida de los lados se duplica?

   ____

   c) Completen la tabla que muestra la relación entre los lados de un cuadrado y su perímetro.

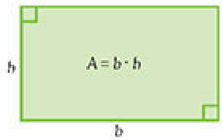
Lados (u)	1	2	5	8	12	15	16
Perímetro (u)							



   d) Traza la gráfica correspondiente y escribe la expresión algebraica correspondiente.

   Expresión algebraica: ______________________

2. Consideren el siguiente rectángulo cuya área es igual a 240 cm^2 y resuelvan lo que se pide.

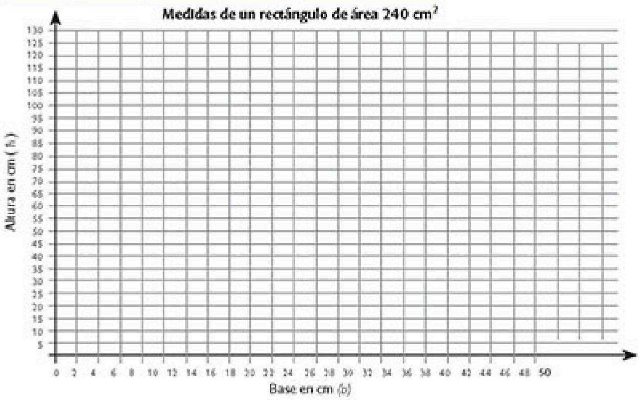


   a) ¿Los valores que pueden adquirir *b* y *h* para obtener el área de 240 cm^2 son únicos? ¿Por qué?

   ____

   b) Si no es así, elaboren una tabla donde escriban valores para la base y la altura que comprueben que el área es la misma.

Base (cm)									
Altura (cm)									



   c) Construyan la gráfica con esos valores y otros más que consideren convenientes.

   d) Escriban la expresión algebraica que representa la situación.

   ____

   e) ¿Qué tipo de relación representa cada situación?

   ____

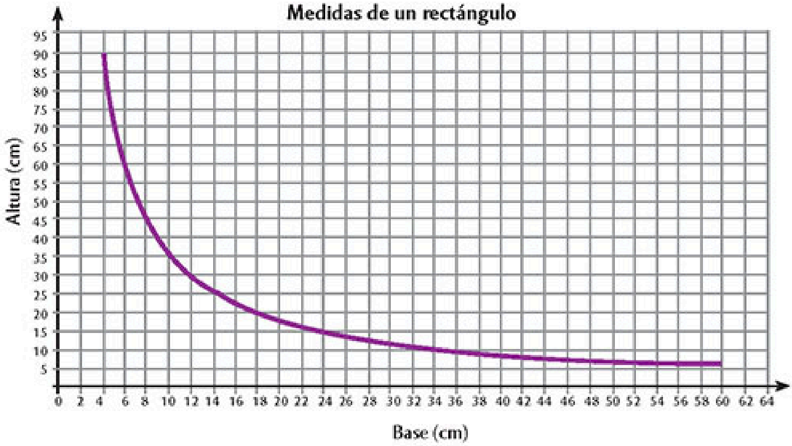
   ____

3. Comparen sus gráficas con las de otros equipos. Discutan las características de la gráfica de relaciones de proporcionalidad inversa y las diferencias con las gráficas de proporcionalidad directa; registren sus conclusiones.

Lectura de gráficas de proporcionalidad inversa

En pareja, resuelvan la siguiente actividad.

1. La siguiente gráfica muestra la relación entre la base y la altura de rectángulos con cierta área.



a) Localicen sobre la gráfica puntos que representen la base de un rectángulo y utilicen dichos valores para estimar la altura correspondiente y anótenlos en la tabla.

Base (cm)					
Altura (cm)					

b) ¿Cuál es el área del rectángulo? ______

c) Obtengan cinco valores para la base y la altura de la gráfica, y que no estén en la tabla.

______

d) Si usas la letra *x* para la base y la letra *y* para la altura, ¿cuál sería la expresión algebraica correspondiente? ______

e) ¿Qué características tiene la gráfica, ¿es creciente o decreciente? ¿Por qué se da esta característica? ______

f) Si el valor de la base se incrementa, ¿qué sucede con los valores de la altura? ¿Cómo se refleja esto en la gráfica? ______

g) ¿En algún momento la gráfica intersecará los ejes *x* o *y*? ¿Por qué? ______

______

2. Agreguen a sus conclusiones previas sobre las características de una gráfica de proporcionalidad inversa las obtenidas en esta actividad.

TAREA

Lee la siguiente situación. Después, resuelve lo que se pide.

1. En un estudio sobre la influencia de los mensajes de prevención sobre obesidad y el consumo de comida chatarra, se observó que al incrementarse el número de personas obesas, disminuían los mensajes contra la obesidad y, recíprocamente, mientras menos personas con obesidad se reportaban, el número de mensajes aumentaba.

   a) La anterior información, ¿es suficiente para conjeturar sobre una relación de proporcionalidad inversa? ¿Por qué? ______________________________

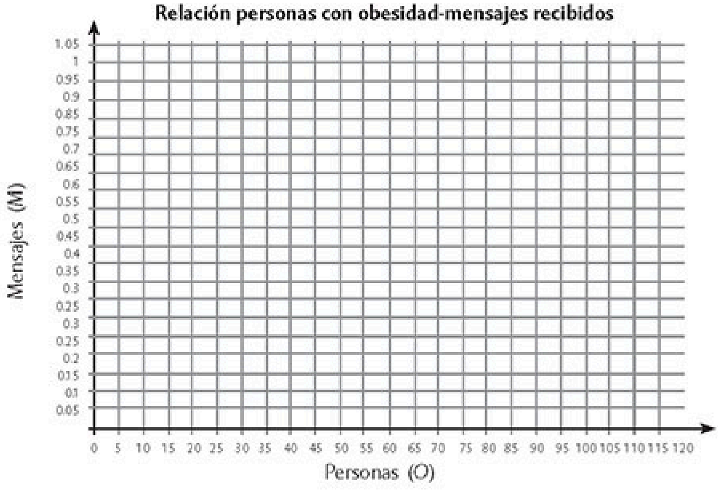
   ____

   b) Si el producto cuyos factores son personas con obesidad (*O*) y mensajes (*M*) permanece constante, por ejemplo: $O \times M = 20$, calcula los datos de la tabla y grafica la relación entre *O* y *M*.

O	10	35	42	50	60	75	90	100	110
M									

   c) Elabora una gráfica con los valores con los que se relacionan *O* y *M*.

Relación personas con obesidad-mensajes recibidos



   d) ¿Cómo interpretas los valores con decimales? ______________________________

   ____

   e) ¿Qué expresión algebraica representa la relación de la gráfica? ______________________________

   f) ¿Cómo serían la tabla de valores y la gráfica si la relación entre *O* y *M* fuera: $O \times M = 50$?

   ____

Proporcionalidad inversa en la física

En pareja, lean cada situación. Después, realicen lo que se pide.

1. En la física y muchos campos de la ciencia las relaciones de proporcionalidad inversa son muy frecuentes. Por ejemplo, la relación entre la velocidad (v), la distancia (d) y el tiempo (t), está dada por la expresión: $v \times t = d$.

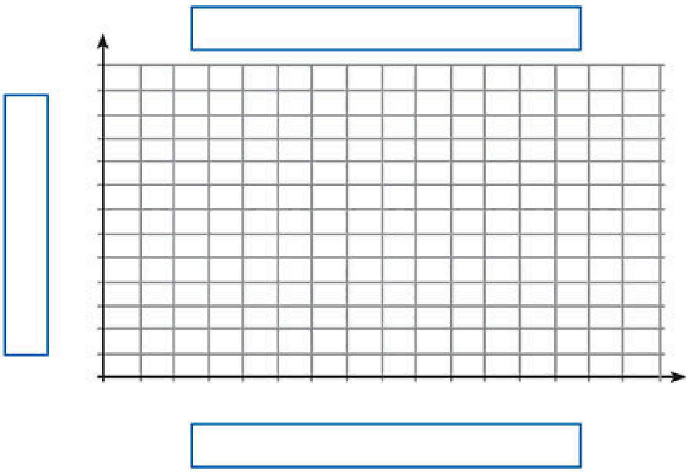
   a) ¿Cómo pueden determinar el tiempo a partir de la expresión anterior? ____________

   b) Si se conoce el tiempo y la distancia, ¿cómo pueden determinar la velocidad a partir de la expresión anterior? ____________

   c) Un móvil tiene que recorrer una distancia de 12 km en línea recta a una velocidad constante. Elaboren una tabla que relacione la velocidad con el tiempo.

Velocidad (km/h)	1	2	4	5	8	10	12	15	20	25
Tiempo (h)										

   d) Asignen títulos y valores a los ejes y construyan la gráfica correspondiente.



2. Analicen la gráfica y respondan a partir de ella las siguientes preguntas:

   a) En la gráfica, ¿qué sucede con el tiempo (y) si la velocidad (x) sigue aumentando?

   ____

   b) ¿Qué sucedería con la gráfica si la velocidad se reduce a velocidades menores a 1 km/h?

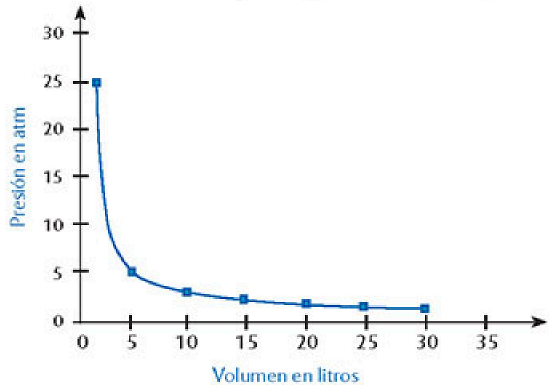
   ____

   c) ¿Por qué entre menor es la velocidad la pendiente es mayor? ____________

   ____

3. La ley de Boyle establece la relación entre la presión (P) de un gas y su volumen (V) a temperatura y masa constante. Cuando los valores de P en atm (**atmósferas**) se grafican en función de V (es importante que la temperatura y masa sean constantes), se obtiene una gráfica como la siguiente:

Ley de Boyle
Relación entre la presión y el volumen de un gas



Así tenemos que: $PV = k$, donde k es una constante cuyo valor se conoce si la temperatura y la masa del gas son constantes.

a) Identifiquen parejas de puntos en la gráfica y completen la siguiente tabla.

Presión (atm)									
Volumen (litros)									

b) ¿Cuál es el valor de la constante k que corresponde a la relación? ____________

c) ¿Qué expresión algebraica corresponde a los valores establecidos en la gráfica?

____

d) ¿Cómo varía la presión al considerar las variaciones del volumen? ____________

e) Si continuaran incrementándose valores para el volumen, ¿en algún momento la presión podría ser cero? Expliquen su respuesta. ____________

____

f) ¿Qué sucede si el volumen toma valores cercanos a cero? ____________

____

4. Comparen sus respuestas con las de otras parejas. Discutan por qué en relaciones de proporcionalidad inversa no es posible tener valores iguales a cero; justifiquen su postura a partir de la regla general: $y = k/x$. Registren los acuerdos a los que llegaron en su cuaderno.

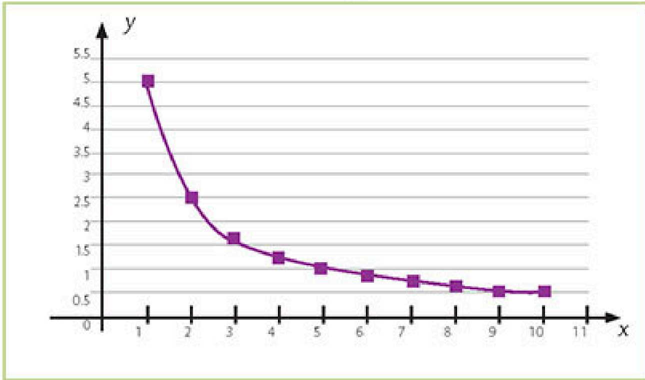
Glosario

Atmósferas. Unidad de presión que equivale a la presión que ejerce la atmósfera terrestre al nivel del mar, suele abreviarse como atm.

APRENDEMOS

Las gráficas de relación de proporcionalidad inversa se representan por una curva llamada "hipérbola".

La expresión algebraica vinculada a este tipo de gráficas es: $y = \frac{k}{x}$, donde k es una constante y las variables que se relacionan por medio de la expresión algebraica son x y y, como muestra la siguiente gráfica que representa la relación: $y = \frac{5}{x}$.

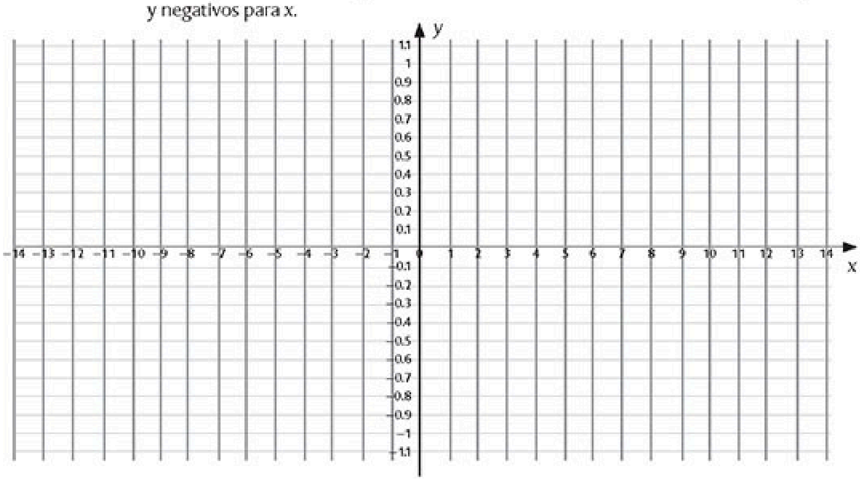


Esta forma se da porque x y y no pueden ser cero. Esto se justifica con la relación: $xy = k$, debido a que todo número multiplicado por cero es igual a cero.

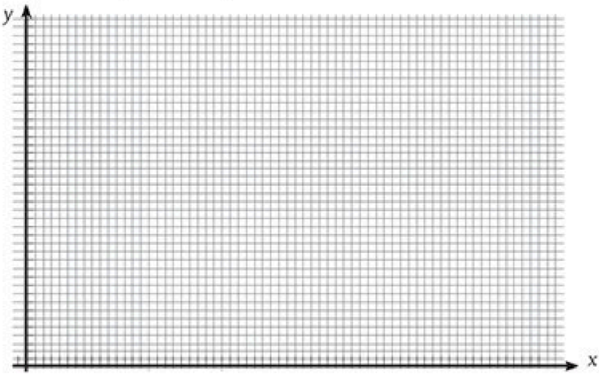
Constante 1

En pareja, resuelvan las siguientes actividades.

1. Consideren una relación : $y = k/x$, donde el valor de $k = 1$, considerando valores positivos y negativos para x.



2. Consideren una relación de proporcionalidad inversa donde el valor de *k* sea positivo y menor que 1 y tracen la gráfica correspondiente.



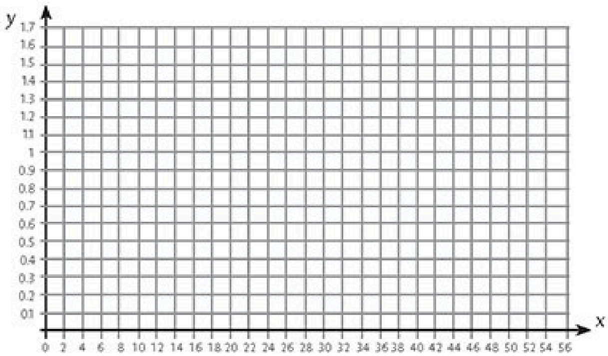
3. Consideren la información de la siguiente tabla y resuelvan lo que se pide.

x	6.4	16	25	32	40	50	64
y	1.25	0.5	0.32	0.25	0.2	0.16	0.125

a) ¿A qué tipo de relación de proporcionalidad se refiere la tabla? ______________________

b) Escriban la expresión algebraica correspondiente. ______________________

c) Elaboren la gráfica correspondiente.



d) ¿En qué intervalos se observa que la gráfica crece o decrece más rápido?

____

e) ¿Qué sucede cuando los valores de x o y se acercan a cero?

____

f) En esta relación, ¿las variables x o y pueden ser cero? ¿Por qué?

____

4. Respondan las siguientes preguntas.

a) Determinen la expresión algebraica que le corresponde. ______________________

b) Elaboren una tabla con seis valores para esta gráfica.

x						
y						

5. Escriban un problema o una situación que pueda ser representada por la información que muestra la gráfica anterior.

____

____

6. En grupo, discutan las siguientes preguntas, argumentando sus respuestas: ¿cuándo crecen o decrecen los valores de *y*?, ¿en cuáles valores de x, la variable y crece más rápido?, ¿en cuáles valores de x, la variable *y* decrece más lento?, ¿qué sucede cuando *x* se acerca a cero?, ¿puede x tomar el valor de cero? Respondan las preguntas en su cuaderno a manera de resumen; incluyan las características de las gráficas de proporcionalidad inversa.

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Se tiene la expresión algebraica $y = \frac{3}{x}$, y un compañero dice que cuando x vale cero el valor de *y* también es cero. ¿Qué le dirías?
2. Si un compañero dice que la expresión algebraica $y = \frac{0.25}{x}$ representa una relación de proporcionalidad directa, ¿qué le dirías?

Crea y evalúate

CONCLUIMOS

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección.

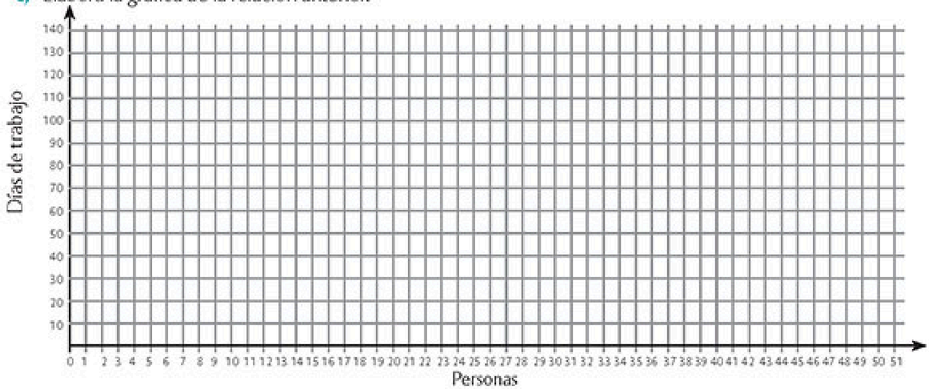
1. Un trabajo debe realizarse en un máximo de 160 días.
   a) Se calcula que con cuatro personas se llegaría al máximo de 160 días. Si el trabajo lo hicieran seis personas, ¿en cuántos días terminarían? Explica tu respuesta. ______________

   ____

   b) Completa la siguiente tabla que muestra la relación entre el número de personas y el tiempo que les llevaría terminar el trabajo.

Personas	10	16	30	32	40	48
Días de trabajo						

   c) Elabora la gráfica de la relación anterior.



   d) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ______________
   e) Si el trabajo lo terminaron en 25 días, ¿cuántas personas participaron en la obra?

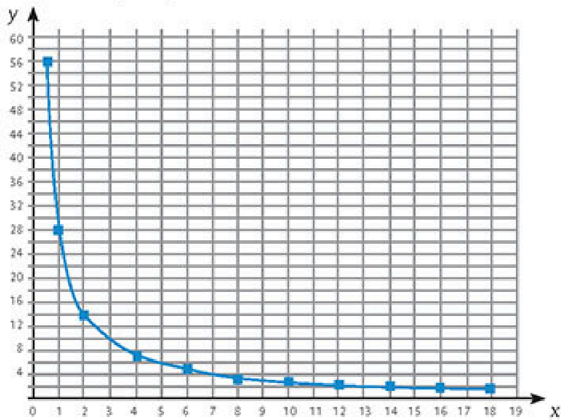
   ____

2. Identifica cuál de las siguientes expresiones corresponde a la gráfica que muestra la relación entre la base y la altura de un rectángulo.

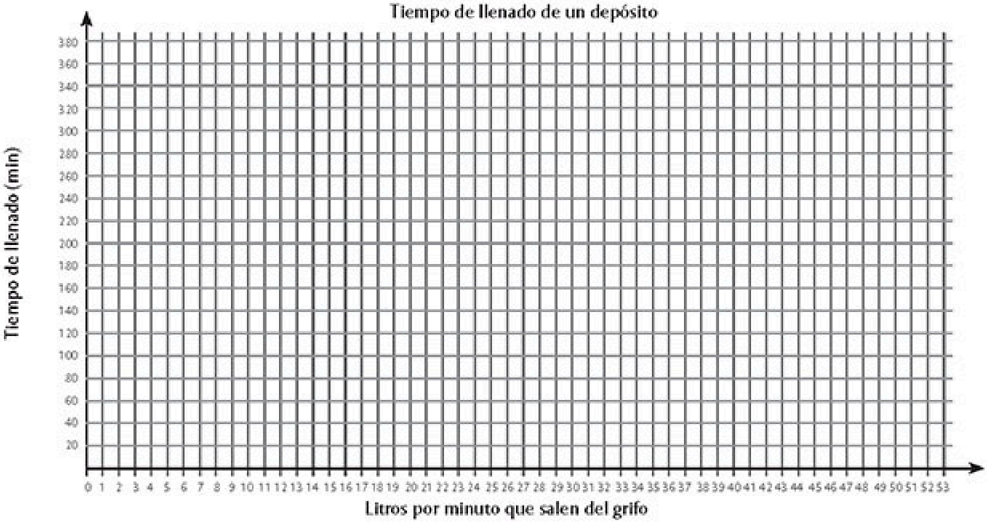
   a) $y = 24x$

   b) $y = \frac{32}{x}$

   c) $y = \frac{28}{x}$



3. Un depósito de agua de 1 800 L se llena en 1.5 horas cuando un grifo se abre por completo. Determina una expresión algebraica que indique en cuanto tiempo se llena el depósito, según los litros de agua por minuto que salen del grifo.



a) ¿Qué expresión algebraica representa la situación? ____________________

4. Encuentra la expresión algebraica que corresponda a las siguientes situaciones. Haz la gráfica correspondiente y elabora una tabla de diez valores. Después, si tienes acceso al material, utiliza las herramientas propuestas en la siguiente página para representar cada situación.

a) Un tren debe recorrer un trayecto de 800 km a velocidad constante. Establece la relación entre la velocidad y el tiempo. ____________________

b) De acuerdo con la Ley de Boyle, vista en la página 201, donde $PV = k$, si la constante es igual a 10, analiza y describe lo que sucedería con la presión (P) en atm y el volumen (V) en m^3 del gas correspondiente.

- ¿Qué expresión algebraica permite conocer el volumen a cierta presión? __________

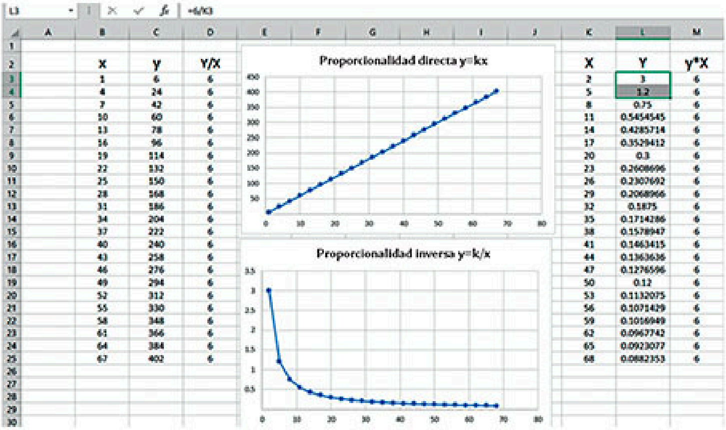
c) La intensidad de corriente (I) y la resistencia eléctrica (R) es una parte de un circuito, sometido a una diferencia de potencial constante, se representa por la ley de Ohm: $V = R \times I$, donde V se mide en volts, R se mide en ohms y e I, en ampers.

- Si suponemos que V = 110 vots, ¿qué relación se establece entre R e I? Analiza y establece la relación entre dichas variables. ____________________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. Utiliza una hoja electrónica para generar datos que se relacionen como proporcionalidad directa e inversa:
   a) Para una relación de proporcionalidad directa, enlista ciertos valores para x en alguna columnas. En la siguiente columna escribe la fórmula correspondiente para determinar los valores de y, por ejemplo =A1*2.5, donde 2.5 representa la constante.
   b) Después, elige las celdas correspondientes a los valores de x y y y traza la gráfica.
   c) Repite la misma accción para construir la gráfica de una relación de proporcionalidad inversa. Por ejemplo, escribe la fórmula: =24/A1.

Genera las fórmulas correctas para que dados los valores de x se generen los de y, de acuerdo con la relación de proporcionalidad que se trabaja, con constantes iguales o diferentes:

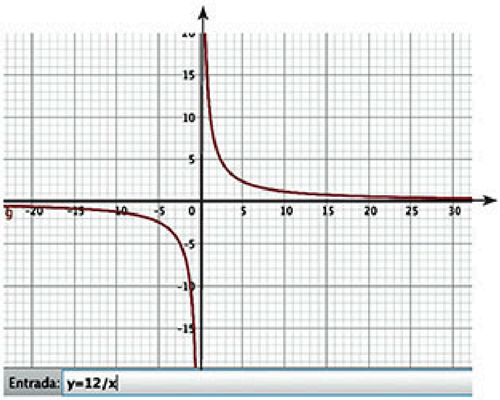


x	y	Y/X
1	6	6
4	24	6
7	42	6
10	60	6
13	78	6
16	96	6
19	114	6
22	132	6
25	150	6
28	168	6
31	186	6
34	204	6
37	222	6
40	240	6
43	258	6
46	276	6
49	294	6
52	312	6
55	330	6
58	348	6
61	366	6
64	384	6
67	402	6

X	Y	y*X
2	3	6
5	1.2	6
8	0.75	6
11	0.5454545	6
14	0.4285714	6
17	0.3529412	6
20	0.3	6
23	0.2608696	6
26	0.2307692	6
29	0.2068966	6
32	0.1875	6
35	0.1714286	6
38	0.1578947	6
41	0.1463415	6
44	0.1363636	6
47	0.1276596	6
50	0.12	6
53	0.1132075	6
56	0.1071429	6
59	0.1016949	6
62	0.0967742	6
65	0.0923077	6
68	0.0882353	6

Discute con tus compañeros qué las hace parecidas y en qué se diferencian las gráficas que construiste.

2. Con Geogebra se pueden analizar la gráfica que se genera al considerar valores positivos y negativos de x, en una relación de proporcionalidad inversa.
   a) En la ventana inferior "Entrada" escribe la expresión algebraica correspondiente, como muestra la imagen, y da enter.
   b) Observa cómo se forma la gráfica.



Este tipo de gráficas corresponden a las denominadas hipérbolas equiláteras. Por ahora solamente hemos trabajado con valores positivos para x, al analizar relaciones de proporcionalidad inversa.

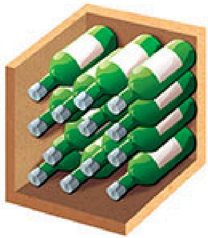
L20 Área del círculo

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

La caja de botellas

En equipo, lean la siguiente situación. Después, resuelvan lo que se pide.

1. En un almacén se pidieron cajas para transportar botellas de vinagre. En las cajas que entregaron caben hasta trece botellas. Cada botella tiene una base circular de 10 cm de diámetro y se acomodaron como muestra la siguiente imagen.



a) Aproximadamente, ¿cuáles son las medidas de largo y ancho de la caja? Explica cómo obtuvieron la respuesta.

b) Estimen el área aproximada de la base de la caja.

c) ¿Cómo podrían estimar la medida de la base de cada botella, es decir, de los círculos de la imagen?

d) Aproximadamente, ¿cuál es el área de la base de cada botella?

e) ¿Cuál es el perímetro de la base de cada botella?

2. Busquen una manera de comprobar sus estimaciones, midiendo o trazando las figuras que consideren necesarias.

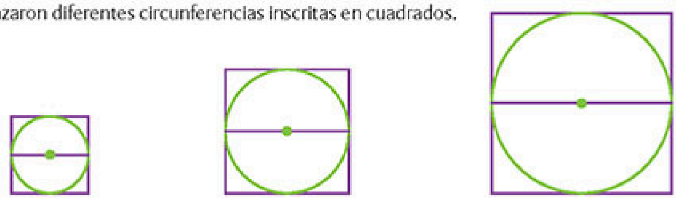
3. Compartan sus procedimientos con los de otros equipos. Juntos respondan las siguientes preguntas: ¿sus resultados son similares?, ¿cómo podrían calcular el área de un círculo?

Discutan lo anterior y lleguen a acuerdos.

Perímetro del círculo

En pareja, analicen las siguientes figuras. Después, realicen lo que se pide.

1. Se trazaron diferentes circunferencias inscritas en cuadrados.



Diámetro = 3.52 cm Diámetro = 5.66 cm Diámetro = 8.06 cm

a) Calculen el perímetro de los cuadrados y los círculos, y completen la tabla. Consideren $\pi = 3.14$.

Círculo	Perímetro (cm)
Círculo 1	
Círculo 2	
Círculo 3	

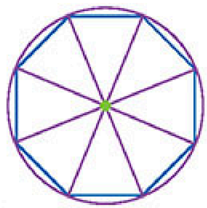
Cuadrado	Perímetro (cm)
Cuadrado 1	
Cuadrado 2	
Cuadrado 3	

b) ¿Cuál es el área de cada cuadrado?

Cuadrado 1: ____________ Cuadrado 2: ____________ Cuadrado 3: ____________

c) ¿El área de cada cuadrado es mayor o menor que el área de cada círculo? ____________

2. Consideren el siguiente polígono inscrito en una circunferencia.



a) ¿Cómo se obtiene el perímetro y área del polígono? ____________

____

____

b) ¿Cuál es el perímetro del círculo en función del radio?

____

c) ¿A qué elemento del polígono se asemeja el radio del círculo? ____________

3. A partir de la información anterior, establezcan una manera de obtener el área del círculo a partir de la fórmula del polígono, usando los elementos del círculo.

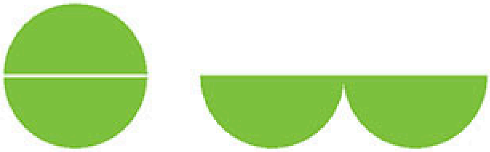
4. Comparen sus conjeturas con las de otra pareja y argumenten su postura. Registren sus acuerdos. ____

____

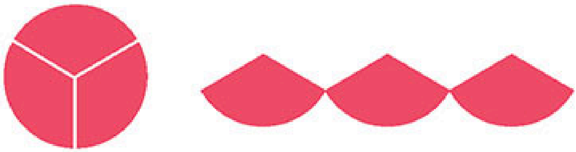
Círculos triangulados

En pareja, lean la siguiente información. Después, realicen lo que se pide.

1. Se puede conocer el área de un círculo a partir de analogías con otras figuras conocidas, como fue el caso de la actividad anterior. Ahora, busquemos otra forma.
   a) Consideren un círculo y divídanlo en mitades; después, coloquen las mitades una al lado de la otra.



   b) Ahora, dividan el círculo en tres partes iguales y coloquen las partes una al lado de la otra, como se muestra en la imagen.

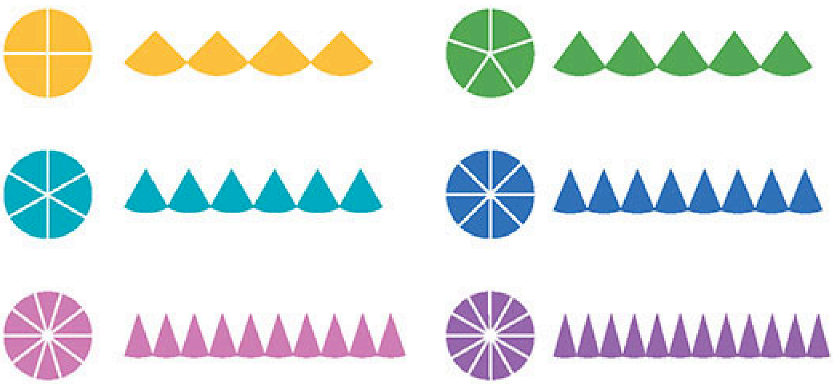


   c) ¿A qué figura se asemeja cada parte del círculo? ______________________

   d) ¿Qué parte del círculo representa la altura de la figura? ______________________

   e) ¿Qué elemento del círculo representa la "base" de las tres figuras? ______________

2. A medida que se hacen más divisiones, los sectores circulares se parecen más a un triángulo y su altura es muy similar al radio; además, la suma de las bases corresponde al perímetro del círculo, como se observa en las siguientes figuras.



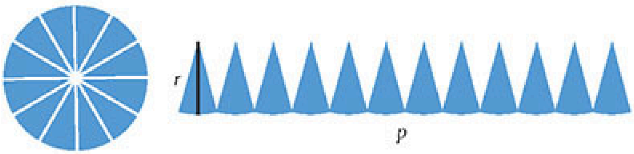
a) ¿Están de acuerdo en que el área del círculo se puede calcular con la suma de las áreas de los sectores circulares? Justifiquen su respuesta. ______________________

____

b) Escriban un procedimiento para obtener el área del círculo a partir de lo anterior. ____

____

3. Al dividir una figura en varias partes y reacomodarlas pueden encontrar varias propiedades del área. Analicen la siguiente figura. Sabemos que cada sector circular no son triángulos, pero a medida que se divide el círculo en más sectores, su curvatura es menos perceptible, asemejándose a un triángulo de altura *r*.



a) Escriban la expresión que permite calcular el área de los "triángulos" que se formaron en función de *P* y de *r*: ______________________

b) Si *r* = 6 cm, ¿cuánto mide *P*? ______________________

c) ¿Cuál es el área del círculo? ______________________

d) Escriban la fórmula para obtener *P*, en función del radio del círculo: *P* = ________

e) ¿Cómo quedaría la expresión del inciso *a* si se utiliza la fórmula del inciso anterior? Simplifiquen la expresión: ______________________

f) Describan con palabras el procedimiento anterior. ______________________

____

g) Si *r* = 5cm, ¿cuál es el área del círculo? Escriban el procedimiento para obtenerlo.

____

4. Validen el procedimiento que propusieron antes para el área del círculo y corroboren que es el mismo que obtuvieron en esta actividad. Compartan sus resultados con el grupo y con el profesor; si existen diferencias, discútanlas para llegar a acuerdos sobre la fórmula para calcular el área del círculo y regístrenlos. ______________________

____

APRENDEMOS

Como sabes, se puede calcular el perímetro de una circunferencia de radio *r* si se conoce el diámetro y se utiliza este valor, es decir:

$$\text{Perímetro de la circunferencia} = \pi \times \text{diámetro}$$

Usando solamente una letra de la expresión anterior, se puede escribir:

$P = \pi \times d$. El símbolo $\times$ se puede omitir: $P = \pi d$.

Si se tiene el dato del radio se puede escribir: $P = \pi \times 2 \times r$, que es igual a $P = 2\pi r$.
De manera similar, el cálculo del área se puede expresar de la siguiente manera:
Área del círculo = $\frac{(\textit{Perímetro} \times \textit{radio})}{2}$, como en el caso de los polígonos regulares.

Si se utiliza la fórmula del perímetro del círculo, la fórmula para calcular su área sería pi por radio al cuadrado, algebraicamente se expresa de la siguiente forma:

$$A = \frac{P \times r}{2} = \frac{2\pi r \times r}{2} = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2$$

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

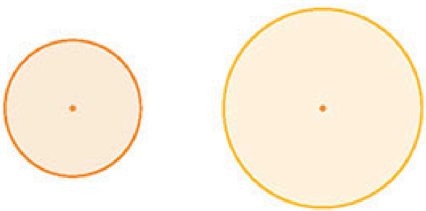
1. Responde las siguientes preguntas. Considera $\pi = 3.14$.
   a) ¿Cuál es el perímetro y el área de un círculo de radio 1 m?

   ____

   b) ¿Cuál es el perímetro y el área de un círculo de diámetro 2 dm?

   ____

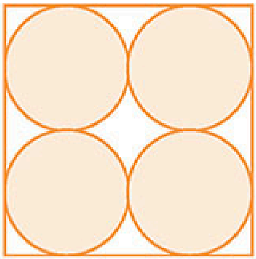
2. Calcula el área y el perímetro de los siguientes círculos. Utiliza tu regla para hacer las mediciones necesarias.



Producción de mermelada

Analiza la información. Después, resuelve los problemas.

1. Un productor de mermelada elaboró cajas para acomodar cuatro frascos en cada una como se muestra, y desea saber cuánto miden las botellas porque quiere aprovechar el espacio entre ellas para llenarlo con viruta de madera.



   a) Si el diámetro de la base de cada frasco mide 14 cm, ¿cuál es el área de la base de la caja? Explica tu respuesta.

   ____

   ____

   b) ¿Cuál es el área de cada círculo? ______________________________

   c) Escribe la fórmula del procedimiento que usaste en el inciso anterior.

   ____

   d) ¿Cuál es el área que cubren los cuatro círculos? ______________________________

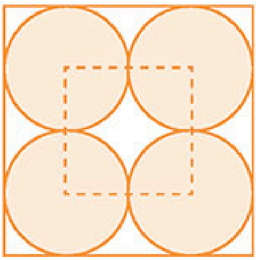
   e) Explica tu procedimiento para obtener el área de la sección blanca de la imagen.

   ____

   ____

   f) ¿Cuánto mide el área que no ocupan los frascos? ______________________________

2. El productor quiere saber cuánto mide la superficie central que queda entre los frascos. Para ello, trazó un cuadrado auxiliar con vértices en el centro de cada círculo, como se muestra en la figura.



   a) ¿Cuánto miden los lados del cuadrado auxiliar? Justifica tu respuesta. ______________________________

   ____

   ____

   b) ¿Cuál es el área del cuadrado auxiliar? ______________________________

   c) ¿Qué parte de cada círculo forma parte del cuadrado central? ______________________________

   d) ¿Cuál es el área de la parte sin colorear dentro del cuadrado auxiliar? ______________________________

3. Compara tus respuestas con las de otro compañero y escriban las conjeturas a las que lleguen.

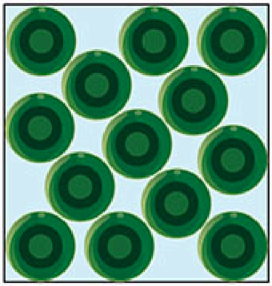
APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza la siguiente situación y responde.

1. Si un compañero dice que para calcular el área de un círculo se puede multiplicar el diámetro por pi, ya que $r^2 = 2d$, porque $2 \times 2 = 4$, ¿qué le dirías?

CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección. Considera 3.14 como valor aproximado de pi.



1. Retoma el problema de la actividad inicial y contesta las siguientes preguntas.
   a) Si el fondo de las botellas mide 10 cm de diámetro, ¿cuál es el área que ocupa cada una? ______
   b) ¿Qué superficie ocupan las bases de las 13 botellas? ______
   c) ¿Cuáles son las medidas de la caja y cuál es su área aproximada? Explica cómo lo determinaste. ______

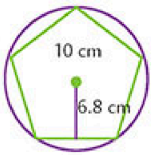
2. Calcula el perímetro y el área de un círculo de radio de 3 cm.

   P = ______ A = ______

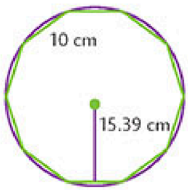
   a) ¿Cuál sería el área si el radio se duplica? ______
   b) Si se duplica la medida del radio, ¿qué ocurre con el área y el perímetro?

   ______

3. Calcula el área de cada círculo que no ocupan los polígonos. La medida de los lados de cada polígono es de 10 cm.



Radio = 8.5 cm
Respuesta: ______



Radio = 16.18 cm
Respuesta: ______

4. Las fórmulas para calcular el área o el perímetro de un círculo permiten relacionar elementos como son el radio y el diámetro con el perímetro y el área.

a) Explica qué datos se deben tener para poder determinar el radio o el diámetro de un círculo. ______________________

____

b) ¿Cómo se puede establecer el radio a partir del área del círculo? ______________________

____

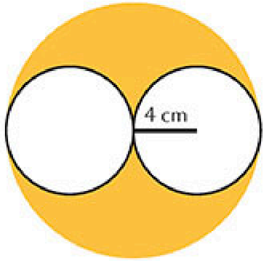
c) Si el área de un círculo mide 45 cm^2, ¿cuánto mide su radio? ______________________

Tic

Para ver cómo se relaciona pi con el área y el perímetro de la circunferencia y el círculo, puedes visitar http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/area7.htm.

5. En una joyería se diseñó un dije circular con dos huecos en su interior, como se muestra en la imagen. Se desea conocer el área restante de ambas caras, después de perforar la pieza, para someterla a un baño de oro.

¿Cuál es el área a cubrir? ______________________



6. Compara tus resultados con los de otros compañeros. En grupo, verifiquen aquellas respuestas en las que no coincidieron con ayuda del profesor.

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

1. En una hoja de cálculo electrónica puedes obtener el área de diferentes círculos de manera simultánea.

a) En la columna A, escribe diferentes medidas para el radio, como muestra la imagen.

b) En la columna B, en la primer celda, escribe la fórmula del área del círculo: =3.14*A1^2, y da enter.

c) Selecciona la celda anterior y arrastra el cursor hacia abajo para obtener el área de los otros círculos.

B2 =3.14*A2^2

	A	B
1	Radio	Área
2	4	50.24
3	6.5	
4	8.2	
5	9	
6	12.4	

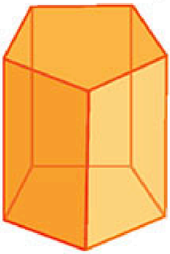
	A	B
1	Radio	Área
2	4	50.24
3	6.5	132.665
4	8.2	211.1336
5	9	254.34
6	12.4	482.8064

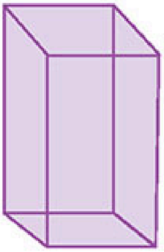
Eje: Forma, espacio y medida • **Tema:** Magnitudes y medidas • **Aprendizaje esperado:** Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

L21 Volumen de prismas y de cilindros

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

Cajas de regalo





Lee la siguiente información. Después, resuelve lo que se pide.

1. Para la presentación de un juguete se está diseñando diferentes cajas de cartón que tienen las formas que se muestran:

   a) ¿Qué forma tienen las cajas? ____________________

   b) ¿Qué características tiene el desarrollo plano del prisma con base rectangular?

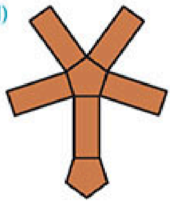
   ____

   c) ¿Qué información necesitas para determinar el volumen del prisma rectangular?

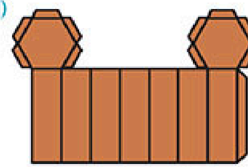
   ____

2. Observa las propuestas que llegaron a la juguetería de las posibles cajas desarmadas para la caja con base pentagonal y contesta las preguntas.

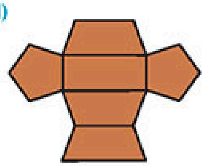
I)



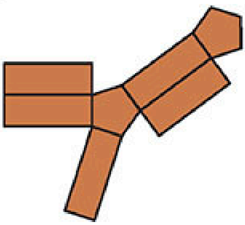
II)



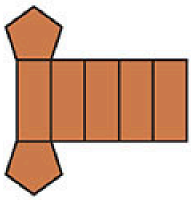
III)



IV)



V)



   a) ¿Cuáles de los modelos desarmados cumplen con la forma del diseño de la caja? ____

   ____

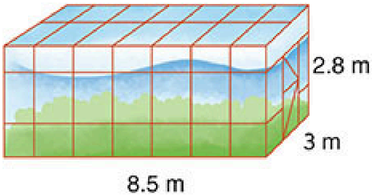
   b) Explica por qué no es posible armar la caja con los modelos que no hayas elegido en la respuesta anterior. ____________________

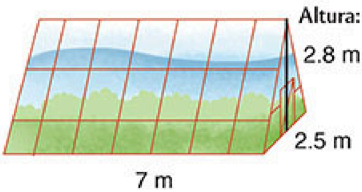
3. Comenta tus respuestas con otro compañero y lleguen a acuerdos.

Los invernaderos

En equipo, lean la siguiente situación y resuelvan lo que se pide.

1. Observen las siguientes imágenes que muestras dos invernaderos que se construyeron para preservar algunas flores y plantas.





Glosario

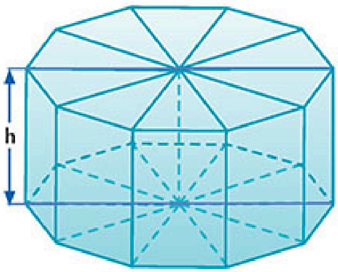
Volumen. Es el número de unidades de longitud cúbicas que caben en un cuerpo tridimensional. Una unidad cúbica (u^3) es igual a un cubo cuya arista mide 1 u.

a) ¿Qué forma tienen los invernaderos? ____________________

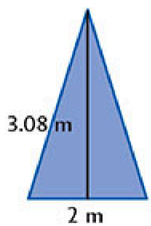
b) ¿Cuál es el **volumen** de cada invernadero?

Volumen: ____________________ Volumen: ____________________

2. Las siguientes imágenes corresponden al diseño de otro invernadero. Como pueden ver, es un prisma, cuya base es un decágono. Por la forma en que se van a instalar los rociadores de agua, conviene analizarlo como varios primas triangulares, como se muestra en las imágenes.



De esta manera se forman triángulos en la base, cuyas medidas se muestran enseguida.



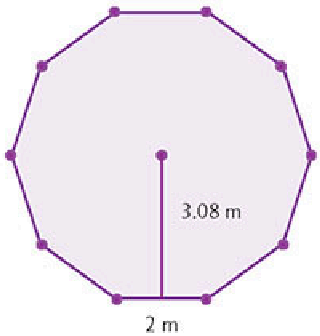
a) ¿Cuál es el área de la base de cada prisma triangular? ____________________

b) Si la altura del invernadero es de 4 m, ¿cuál es el volumen de cada prisma triangular?

____

c) ¿Cuál es el volumen del invernadero? ____________________

3. Consideren el área del decágono que ocupa la base del invernadero.



a) ¿Cuál es el área de la base o decágono?

b) ¿Qué sucede si multiplican el área del decágono, que sirve de base, por la altura del invernadero?

c) ¿Cómo pueden obtener el volumen de cualquier prisma sin necesidad de dividirlo en triángulos o rectángulos?

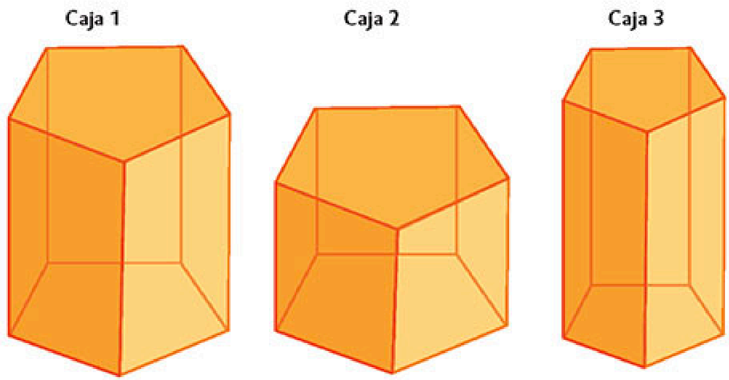
d) ¿Existe alguna diferencia con el procedimiento para calcular el volumen de un prisma rectangular?

4. Discutan sus respuestas con las de otra pareja y encuentren una sola forma para obtener el volumen de cualquier prisma recto.

El tamaño de las cajas

En pareja, retomen el problema de las cajas de la actividad inicial y resuelvan las siguientes actividades.

1. La tienda de juguetes tienen tres diferentes tipos de caja con la misma forma, pero de diferentes medidas, como se muestra a continuación.



a) ¿Cuál de las tres cajas consideran que es más grande, es decir, cuál tiene mayor volumen?

b) Comenten un procedimiento para calcular el volumen de los prismas y escriban sus conclusiones. ______

c) Tomen las medidas que consideren necesarias y calculen el volumen de los prismas que representan las cajas.

Caja 1 ______ Caja 2 ______ Caja 3 ______

d) ¿Será posible determinar el volumen de las cajas a partir de sus desarrollos planos? Expliquen su respuesta. ______

______

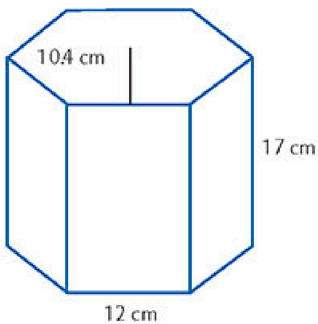
2. Comparen sus respuestas y procedimientos con los de otras parejas. Discutan si consideran que hay alguna relación entre la forma de la base y la forma como se obtiene el volumen de las cajas. Registren sus acuerdos.

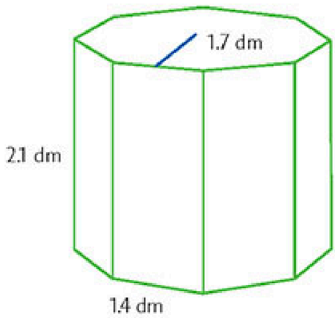
______

______

______

3. Consideren los siguientes prismas rectos y calculen su volumen a partir del procedimiento que encontraron en el punto anterior.





V = ______ V = ______

8. Comparen sus procedimientos en grupo. Con el apoyo del profesor, registren una fórmula para calcular el volumen de prismas rectos cuyas bases son polígonos regulares.

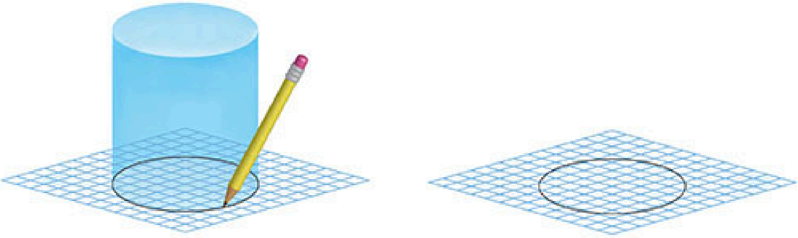
______

______

El cilindro

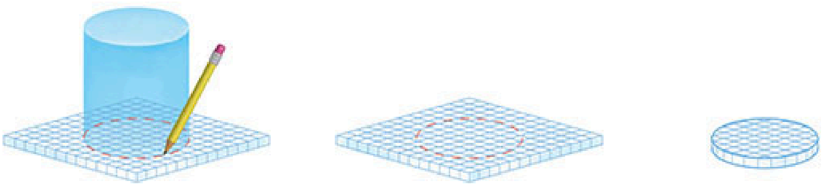
En equipo, lean la información. Después, resuelvan las actividades.

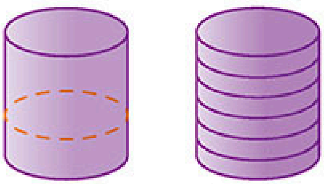
1. Raúl coloca un recipiente de forma cilíndrica sobre una hoja cuadriculada y con un lápiz traza el contorno de la base del cilindro, como muestran las imágenes.



   a) ¿Cuántas unidades cuadradas mide la base del cilindro? ____________________

2. Consideren que en lugar de una hoja cuadriculada, la base del cilindro se trace sobre una base con cubos de 1 u^3, como muestran las siguientes imágenes.





   a) ¿Cuántas unidades cúbicas mide el recorte circular que se hizo? Expliquen su respuesta. ____________________

   b) Si Raúl repite el proceso y obtiene las capas que se muestran en la ilustración de la izquierda, ¿cuántas capas de cubos recortó?

   ____

   c) ¿Cuántas unidades cúbicas tendrá en total el cilindro? ¿Cómo lo determinaron?

   ____

   d) ¿Qué información permite obtener el volumen del cilindro que se genera? Argumenten su postura. ____________________

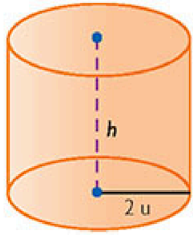
   ____

   e) Escriban una regla general para calcular el volumen de un cilindro. ____________________

   ____

3. Comparen sus respuestas con las de otros equipos.

4. Aplicando la regla que escribieron en la actividad anterior, calculen el volumen del siguiente cilindro.



a) Si el radio mide 2 u, ¿cuánto mide el área de la base del cilindro? ____________

b) ¿Cuál es su volumen si h = 5.4 u? ________________________________

c) ¿Cuál es el volumen de un cilindro si su base mide 3.5 u de radio y tiene una altura de 6 u? ________________________________

5. ¿Cómo puedes relacionar la fórmula para calcular el área del círculo, con la altura (h) de un cilindro recto, para generar una fórmula para calcular su volumen?

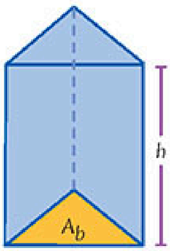
____

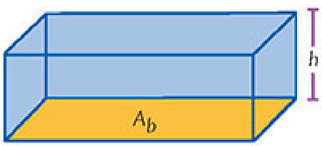
6. Comparen sus resultados con los de otros equipos y lleguen a acuerdos. Después, valídenlos junto con su profesor.

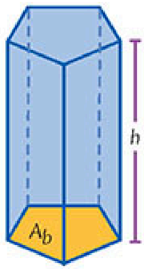
APRENDEMOS

El volumen de un prisma recto de base poligonal es igual al área de la base por la altura. En general, podemos decir que la fórmula para obtener el volumen de cualquier prisma recto es:

$$V = \text{área de la base por altura}, \; V = A_b \times h.$$

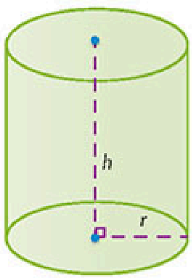






Como sabes, un cilindro es un cuerpo geométrico con dos bases paralelas con forma de círculo y una cara circular.

De manera análoga a lo que sucede con el área de polígonos regulares y el círculo, el volumen de un cilindro se pude obtener a partir de la fórmula del volumen de prismas poligonales rectos.



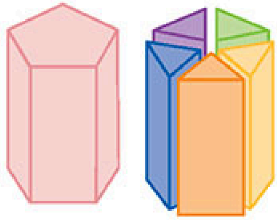
Si un cilindro circular recto tiene altura h y el radio de su base es igual a r, entonces, el volumen V está dado por la fórmula:

$V = \pi r^2 h$, que es igual a $V = A_b \times h$.

TAREA

Resuelve las siguientes actividades.

1. Observa cómo se dividió el prisma y responde las siguientes preguntas.

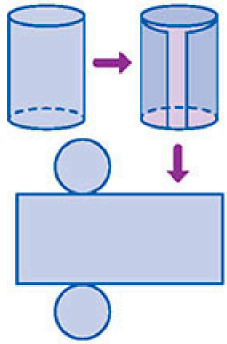


   a) ¿Qué forma tiene el prisma original?

   b) ¿En cuántos prismas se dividió?

   c) Si la base del prisma triangular mide 49.5 cm^2 y su altura es de 16 cm, ¿cuál es el volumen del prisma original?

2. Analiza cómo se descompuso un cilindro hasta obtener su desarrollo plano.



   a) ¿Qué figuras forman el desarrollo plano del círculo?

   b) ¿A qué medida corresponde el largo de dicho rectángulo?

   c) ¿Y el ancho?

   d) ¿Cómo podrías obtener el volumen del prisma a partir de su desarrollo plano?

APRENDE DE LOS ERRORES

Analiza las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero dice que para convertir el volumen de un prisma de metros a centímetros, basta con multiplicar por 100, porque 1 m = 100 cm, ¿estarías de acuerdo con él? ¿Por qué?

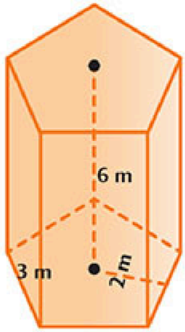
2. Si la base de un prisma mide 2 m^2 y su altura mide 35 cm, entonces, el volumen es igual a 70 m^3. ¿Qué opinas? ¿Dónde se cometió el error?

Crea y evalúate

CONCLUIMOS

Resuelve los siguientes problemas para practicar lo aprendido en la lección.

1. Calcula el volumen del siguiente prisma y responde las preguntas. Considera que las medidas están dadas en metros.



a) Volumen: ______________________

b) ¿Qué relación hay entre litros y decímetros cúbicos? ______________________

c) ¿Cuántos metros cúbicos equivalen a 1 litro? ______________________

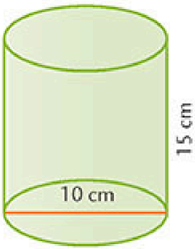
d) Si el prisma pentagonal representa un contenedor de agua, ¿cuál es su capacidad en litros?

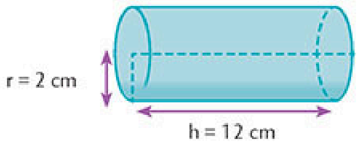
____

e) Si tiene agua hasta 3.2 metros de altura, ¿cuántos litros de agua contiene?

____

2. Calcula el volumen de los siguientes cilindros. Después, calcula su capacidad en litros.





V = ______________________ V = ______________________

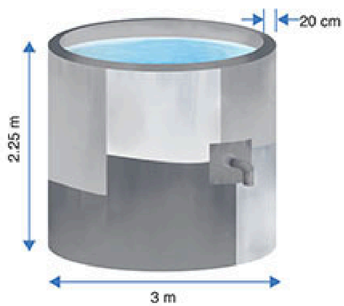
Capacidad = ______________________ Capacidad = ______________________

3. Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Si su altura mide 125.66 cm, calcula su volumen en metros.

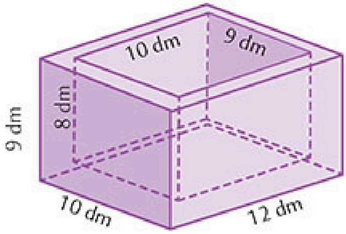
____

____

4. Las dimensiones de un depósito cilíndrico se especifican en la figura. Calcula la capacidad del recipiente en litros.

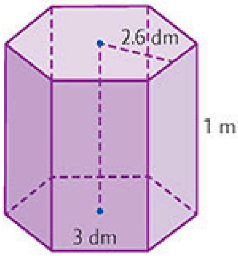


Capacidad: ______________________



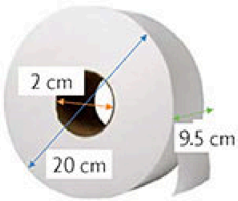
5. Un decímetro cúbico del material con el que está construido el recipiente representado en la figura tiene una masa de 7.8 kg. Calcula cuánto "pesa" el recipiente. Considera que la parte central es hueca.

Respuesta: ______________________



6. Calcula cuánto tiempo tardará en llenarse el deposito de agua si se llena a razón de 15.5 litros por minuto.

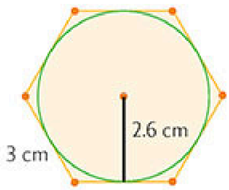
Respuesta: ______________________



7. Calcula el volumen de papel higiénico que hay en un rollo de 10 cm de radio y 9.5 cm de altura, formado por un hueco de 2 cm de diámetro. Redondea a dos cifras decimales.

Respuesta: ______________________

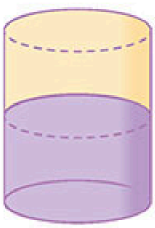
8. Realiza el esbozo de un cilindro colocado exactamente en el interior de un hexágono regular. Su base es como se muestra en la siguiente figura y ambos tienen la misma altura.



a) Calcula el volumen del cilindro en el interior del prisma hexagonal, cuyos lados miden 3 m, su apotema es de 2.6 cm y tiene 4 cm de altura, y determina el volumen del prisma que no ocupa el cilindro.
Respuesta:

____

9. Resuelve.

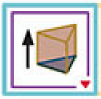


a) Se vierten 8 cm^3 de agua en un recipiente cilíndrico de 1.3 cm de radio, como el que se muestra. ¿Qué altura alcanzará el agua? ______________________
b) ¿Qué recipiente es mayor, uno con volumen de $\frac{1}{2}$ m^3 o uno con forma de cubo de $\frac{1}{2}$ m de arista? ______________________
c) Durante una tormenta se registraron unas precipitaciones de 80 litros por metro cuadrado. ¿Qué altura alcanzaría el agua en un recipiente en forma de prisma de base cuadrada de 10 m de lado? ______________________
d) Se vierten 150 cm^3 de agua en un vaso con forma de cilindro recto, alcanzando 8 cm de altura. ¿Cuál es el radio de la base del vaso? ______________________
e) Un depósito cilíndrico de agua almacena a su máxima capacidad 58 904.86 L de agua. Si tiene un diámetro de 5 m, ¿cuál debe ser su altura? ______________________

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

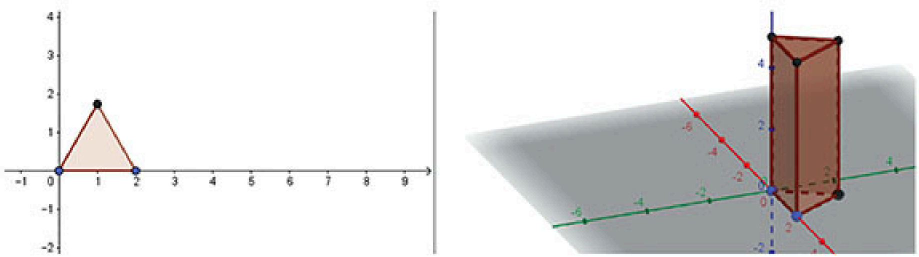
1. Con Geogebra es posible observar los desarrollos planos de los cuerpos que se generen con la vista 3D.

   a) Los polígonos que generes en la parte de Geometría, mientras estén activados los ejes y tengas activas las Vistas Geométricas y de 3D, se pueden ver reflejados. La herramienta:

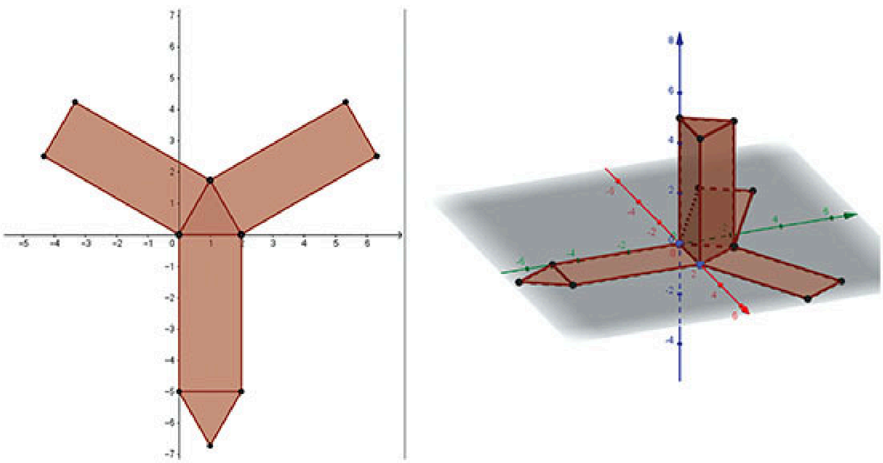
   

   Prisma o Cilindro desde su base
   Base poligonal o circular para crear el prisma o cilindro por arrastre o introduciendo el valor de su altura

   te permite generar prismas con base en dichos polígonos, como muestra la imagen.



   b) Con la herramienta desarrollo:  , puedes ver el desarrollo plano de dicho prisma en ambas representaciones.



L22 Probabilidad teórica

COMENZAMOS **Reflexiona y discute**

¿Qué tan probable?

Lee la información. Después, resuelve lo que se pide.

1. Al tirar una tachuela puede caer acostada o con la punta hacia arriba. Se ha realizado el experimento de lanzar una tachuela varias ocasiones, obteniendo los resultados dados en la tabla:

Número de tiradas	10	50	100	500	1 000
Frecuencia absoluta del evento "cae con la punta hacia arriba"	7	29	65	337	668

a) Anota la frecuencia relativa del suceso caer hacia arriba de cada experimento:

10 tiradas: ____________ 50 tiradas: ____________ 100 tiradas: ____________

500 tiradas: ____________ 1 000 tiradas: ____________

b) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial del evento "cae hacia arriba" en cada experimento?

10 tiradas: ____________ 50 tiradas: ____________ 100 tiradas: ____________

500 tiradas: ____________ 1 000 tiradas: ____________

2. La hermana de Juan está embarazada y ella cree que tendrá una niña; sin embargo, el esposo piensa que va a ser niño; y Juan no se atreve a opinar.
   a) Si la hermana de Juan no se ha realizado ningún examen para determinar el sexo de su bebé, ¿qué seguridad puede tener de que será una niña?

   ____

   b) ¿Qué seguridad puede tener el esposo de que será un niño? ____________
   c) ¿Cómo podrías establecer que ambas posibilidades pueden suceder y cómo lo representarías? ____________
3. Simulen la situación lanzando 30 veces una moneda: sol es igual a niño y águila igual a niña.
   a) ¿Cuántas veces salió "niña"? ____________
   b) Sin consultar las cifras oficiales, ¿cuántos niños o niñas esperas que hubieran nacido?

   ¿Por qué? ____________
4. Compara tus respuestas con las de otros compañeros. Comenten cómo podrían representar matemáticamente la probabilidad de que un evento sea seguro que ocurra y uno que sea imposible de ocurrir.

Glosario

Frecuencia absoluta. Veces que sucede un evento cuando se realiza un experimento aleatorio.

Frecuencia relativa. Es igual a la frecuencia absoluta entre el número de veces que se realizó un experimento.

Probabilidad frecuencial. Es igual a:

$$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{Experimentos realizados}}$$

Experimentos aleatorios

En pareja, realicen las siguientes actividades.

1. Consideren el evento de lanzar una moneda al aire y los resultados: sol y águila.
   Si se realiza el experimento de lanzar una moneda "legal" (es decir, que no favorezca obtener un resultado determinado), antes de hacer algún lanzamiento:
   a) ¿Qué probabilidad le asignarían a obtener águila como resultado?
   ____
   b) ¿Qué probabilidad correspondería a obtener sol?
   ____
   c) Expliquen por qué asignarían la probabilidad de esa manera.
   ____
   d) ¿Qué probabilidad le asignarían a que, después de lanzar la moneda, ésta caiga verticalmente sin que muestre un resultado? ______________________
   e) Si lanzan la moneda 10 veces, ¿que probabilidad le asignarían al número de águilas o soles?
   ____
   f) Si lanzan 50 veces una moneda, ¿cuántas veces consideran que saldría cada evento?
   ____

2. Consideren que una bolsa, de la cual no pueden ver el contenido, contiene tres bolas del mismo tamaño y textura, como se muestra en la imagen.

   a) ¿Cuál de los eventos: extraer una bola roja o extraer una bola blanca, tiene más probabilidad de ocurrir?
   ____
   b) Numéricamente, ¿qué probabilidad tiene de ocurrir el evento extraer una bola roja? Argumenten su respuesta.
   ____
   c) ¿Qué probabilidad le darían a extraer la bola blanca? ______________________
   d) Si realizan el experimento de extraer una bola y regresarla a la bolsa 60 veces, ¿cuántas veces consideran que ocurrirá cada evento? Expliquen cómo lo determinaron.
   ____
   ____
   e) Si se repite el experimento 150 veces, ¿cuántas veces ocurrirá cada evento?
   ____

3. Considerando el experimento de la página anterior, completen la siguiente tabla. Escriban las veces que consideran que ocurrirá cada evento.

Evento	15 extracciones	60 extracciones	100 extracciones	150 extracciones
Extraer una pelota blanca				
Extraer una pelota roja				

a) Describan el criterio que siguieron para completar la tabla. ____________________

____

4. Reúnanse en equipos y elaboren papelitos del mismo tamaño que simulen las pelotas del experimento, como se muestra enseguida.

Pelota roja	**Pelota roja**	**Pelota blanca**

a) Coloquen los papelitos doblados dentro de una bolsa y lleven a cabo el experimento las veces que muestra la tabla.
b) Para optimizar el tiempo, en los casos en que hay que hacer un número de extracciones mayor, consideren las extracciones del experimento anterior y dividan el total de los restantes entre los integrantes del equipo. Junten los resultados y escriban la probabilidad frecuencial de cada evento.

Evento	15 extracciones	60 extracciones	100 extracciones	150 extracciones
Extraer una pelota blanca				
Extraer una pelota roja				

c) ¿Se cumplieron sus predicciones en todos los casos?

____

d) ¿Qué casos se parecen más y en cuáles hay más diferencia?

____

e) Entre más veces realizaron el experimento, ¿qué sucede con su predicción y las veces que ocurrió cada evento?

____

5. Comparen sus resultados y respuestas con las de otros equipos. Discutan las tres últimas respuestas de la actividad, ¿coinciden? ¿Por qué consideran que sucede? Busquen llegar a acuerdos y registren sus conclusiones al respecto.

TAREA

Considera el siguiente evento y responde lo que se pide.

1. En una bolsa opaca, se colocaron tres bolas rojas, dos blancas y cuatro verdes, todas del mismo tamaño y la misma textura.
   a) ¿Qué probabilidad le darías a extraer la bola negra? ¿Por qué?

   ____

   b) ¿Qué probabilidad le darías a extraer una bola roja, una blanca o una verde? ¿Por qué?

   ____

   c) ¿Qué probabilidad le darías al evento de extraer una bola blanca? ______________

   d) ¿Qué probabilidad le darías a extraer una bola roja? ______________

   e) ¿Qué probabilidad le darías a extraer una bola verde? ______________

   f) Si se repite el experimento 150 veces, ¿cuántas veces crees que salga cada color de pelota? ______________

2. Escribe la manera en que puedes determinar la probabilidad de ocurrencia de un resultado si sabes que habrá N resultados posibles y que un resultado tiene M posibilidades de ocurrir. ______________

APRENDEMOS

Un experimento aleatorio es aquél en el que no se puede anticipar lo que sucederá. En un experimento aleatorio, se conoce como probabilidad teórica a la probabilidad estadística de que ocurra un evento, considerando que éstos se realizan en igualdad de condiciones.

La probabilidad teórica establece una medida, es decir, un número que determina la posibilidad de ocurrencia de un resultado; dicho número representa la probabilidad de que ocurra dicho resultado.

Si se supone que todos los resultados individuales tienen la misma posibilidad de ocurrir, la probabilidad clásica o teórica se define como:

$$P(x) = \frac{\text{número de eventos favorables}}{\text{número total de resultados posibles}}$$

Los valores de probabilidad teórica de que ocurra un evento deben estar comprendidos entre 0 y 1, ya que cero representa que un evento sea imposible que suceda y uno representa que sea seguro que suceda.

Por ejemplo, el experimento de lanzar dos monedas al aire tiene cuatro eventos posibles: (S, S), (S, A), (A, A), (A, S). De esta forma, podemos determinar la probabilidad de cada evento; como puedes ver (S, A) y (A, S) representan el mismo resultado, así:

$$P(S, S) = \frac{1}{4} \qquad P(S, A) = \frac{1}{2} \qquad P(A, A) = \frac{1}{4}$$

Urna con pelotas

En equipo, resuelvan las siguientes actividades.

1. La siguiente imagen representa una urna opaca con pelotas del mismo tamaño y textura. Con ellas se realiza el experimento de extraer una pelota sin ver; después, se anota el resultado y se regresa la pelota a la urna.

a) Al realizar una extracción, ¿qué color tiene mayor probabilidad de salir?

____

b) ¿Cuál tiene menor probabilidad de salir? _______________________

c) ¿Lo anterior garantiza que esto ocurrirá siempre? ¿Por qué? _______________

d) Determinen la probabilidad teórica de que al realizar una extracción la pelota sea de cada color.

P(R) = ____________ P(B) = ____________ P(V) = ____________

P(A) = ____________ P(N) = ____________

2. Analicen la probabilidad teórica de cada evento y respondan lo que se pide.

a) Si realizan el experimento anterior 10 veces, ¿la probabilidad frecuencial de cada evento será similar a la probabilidad teórica? ¿Por qué? _______________________

____

b) Si se realiza el experimento 50 veces; después, 200 veces; y, finalmente, 1 000 veces, ¿en qué caso la probabilidad frecuencial se parecerá más a la probabilidad teórica? Argumenten su respuesta. _______________________

____

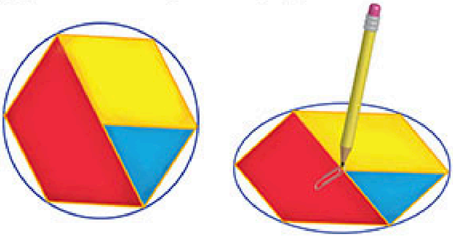
3. Con apoyo del profesor, discutan en grupo qué sucede con la probabilidad frecuencial y la probabilidad teórica al realizar un experimento aleatorio cierto número de veces. Registren sus acuerdos. _______________________

____

Registro de resultados de un juego de azar

En equipo de tres o cuatro integrantes, lleven a cabo las siguientes actividades.

1. Construyan en cartulina o cartón la siguiente ruleta.
   - Coloquen un clip en el centro de la ruleta. Después, fijen un lápiz como apoyo para hacer girar el clip, como muestra el ejemplo.
   - Giren el clip para realizar el experimento y registren sus resultados.



a) Antes de realizar el experimento, calculen la probabilidad teórica de que la ruleta caiga en cada color.

Rojo: ______________ Amarillo: ______________ Azul: ______________

b) Si giran 50 veces la ruleta, ¿cuántas veces caerá en cada color? ______________

____

c) Realicen el experimento de girar la ruleta 50 veces. Después, completen la tabla.

Color	Probabilidad teórica	Probabilidad frecuencial como fracción
rojo		
amarillo		
azul		

d) ¿Los resultados obtenidos coinciden con la probabilidad teórica o fueron similares?

Expliquen a qué se debe esto. ______________

____

e) ¿Qué piensan que sucede entre la probabilidad teórica y la frecuencial si realizan el experimento 500 veces? ______________

f) Si se realizarán 36 giros de la ruleta, ¿cuántos de ellos consideran que caerán en cada color?

____

g) ¿Qué criterio siguieron para responder? ¿Por qué? ______________

____

Lanzamiento de dados

En equipo, realicen las siguientes actividades.

1. Cada uno de los integrantes del equipo debe conseguir un dado de seis caras. Consideren el experimento de lanzar el dado y respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuántos resultados posibles hay en el experimento? ____________________
   b) ¿Cuáles son todos los posibles resultados? ____________________
   c) ¿Cuál es la probabilidad teórica de que ocurra cada resultado? ____________________
   d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número impar? ____________________
   e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener como resultado un número par? ____________________

2. Utilicen su dado y realicen el experimento de lanzarlo 20, 50 y 100 veces; y registren sus resultados. Dividan el número de lanzamientos entre los integrantes del equipo para agilizar la actividad.
   a) ¿Cuál fue la probabilidad frecuencial de que cayera el número uno en los tres experimentos? ____________________
   b) ¿En qué caso la probabilidad frecuencial se parece más a la teórica?
   ____

3. Consideren el experimento de lanzar dos dados y registren todos los posibles resultados. Consideren que (1, 6), no es el mismo resultado que (6, 1). Posibles resultados:
   ____
   a) ¿Cuántos resultados posibles tiene el experimento? ____________________
   b) ¿Todos tienen la misma probabilidad de ocurrir? ____________________
   c) Si tuvieran que elegir un número en la suma de dichos dados, ¿cuál sería? ¿Por qué?
   ____
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar los dados, la suma sea cuatro? ____________________
   e) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dados sea siete? ____________________
   f) ¿Cuál es la probabilidad de que salga el mismo número en ambos dados? ____________________
   g) Si se lanzan dos dados 200 veces, ¿en cuántas veces la suma será cinco? Expliquen qué criterio siguieron para determinarlo. ____________________
   ____

APRENDEMOS

Como sabes, la **probabilidad frecuencial** o experimental es el número de veces que ocurre un evento al realizar un experimento aleatorio y es igual al cociente del número de resultados favorables de un evento entre el total de veces que se realiza el experimento.

Al realizar un experimento, la probabilidad frecuencial no necesariamente coincide con la probabilidad teórica o clásica. Por ejemplo, cuando se lanza un dado los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Así que cada resultado individual tiene una probabilidad de $\frac{1}{6}$.

Al realizar el experimento, esto no necesariamente ocurre, por ejemplo, si lanzamos cuatro veces un dado, existe la probabilidad de que el número tres salga tres veces. Si usamos la probabilidad frecuencial en este caso, sería $\frac{3}{4}$, lo que difiere de lo que establece la probabilidad teórica.

Pero en la medida en que se lanza más veces el dado, este valor cambia y se espera que, cuando el número de lanzamiento sea suficientemente grande, los resultados de la probabilidad clásica y frecuencial coincidan o sean muy parecidos.

Tic

Puedes utilizar un simulador de lanzamiento de dados en https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD. Ingresa al sitio y elige el número de lanzamientos.

En equipo, realicen el experimento de lanzar dos dados 20, 50, 100 y 200 veces, y sumar los valores de sus caras. Si tienen oportunidad, utilicen el simulador que muestra el recuadro “Tic”.

1. Registren en la tabla la probabilidad teórica de cada resultado.

Suma de los puntos al lanzar dos dados	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probalidad teórica											

2. Registren sus resultados en la siguiente tabla como fracción: resultados favorables entre el total de eventos.

Probabilidad frecuencial											
Suma de los puntos al lanzar dos dados	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
20 lanzamientos											
50 lanzamientos											
100 lanzamientos											
200 lanzamientos											

a) Comparen sus resultados con la probabilidad frecuencial de cada evento.

b) ¿Qué observan? ¿En qué caso la probabilidad frecuencial tiende a parecerse más a la probabilidad teórica? ______________________

____

3. Comparen sus resultados con los de otros equipos. Comenten la importancia de conocer la probabilidad teórica al realizar un experimento aleatorio. Registren sus conclusiones con el apoyo del profesor. ______________________

APRENDE DE LOS ERRORES

Lee las siguientes situaciones. Después, comparte tu opinión con un compañero.

1. Si un compañero te dice que la probabilidad teórica de un evento puede ser un número negativo, ¿qué le dirías?
2. Si al lanzar un dado cierto número de veces, el número cinco sale cuatro veces, ¿es correcto decir que la probabilidad frecuencial fue $\frac{5}{6}$?

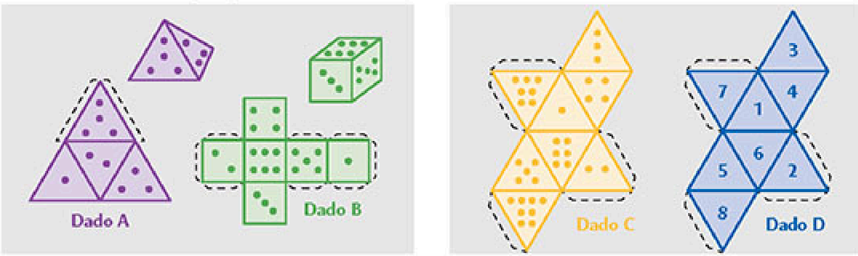
CONCLUIMOS Crea y evalúate

Resuelve las siguientes actividades para practicar lo aprendido en la lección.

1. Retoma el problema de la actividad inicial y escribe la probabilidad de que el hijo de la hermana de Juan sea niño o niña.

   Que sea niño: ____________________ Que sea niña: ____________________

2. Elabora dados de distintos tipos y con diferente cantidad de caras, como los que se muestran, para realizar lanzamientos y calcular la probabilidad frecuencial y teórica que corresponde a cada resultado individual. El resultado favorable en el caso del dado A y C el resultado favorable es el de la cara que queda hacia abajo, y en el caso del dado D, es la cara que queda hacia arriba.



3. Calcula la probabilidad teórica de cada resultado en cada dado.

   a) Dado A: ____________________

   b) Dado B: ____________________

   c) Dado C: ____________________

   d) Dado D: ____________________

   e) ¿En qué dado es más probable que salga tres? ____________________

   ____

4. Realiza 20, 80 y 120 lanzamientos en cada dado. Antes de lanzarlo, estima cuántas veces saldrá cada número en cada caso.

5. Considera que una baraja inglesa tiene cuatro figuras diferentes: trébol, diamante, espada y corazones; y son 13 cartas de cada una: el as, números del 2 al 10, la jota (J), la reina (Q) y el rey (K).

a) Si se toma una carta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que salga una letra?

b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un trébol y un número?

c) ¿Cuál es la probabilidad de sacar un as?

6. Si no sabes cuántas bolas de cada color hay en una urna, pero sabes que $P(R)=\frac{2}{7}$, indica la probabilidad de obtener una bola roja; $P(B)=\frac{1}{7}$, la de obtener una bola blanca; y $P(V)=\frac{4}{7}$, la de obtener una bola verde, ¿cuántas bolas hay en la bolsa y cuántas hay de cada color? ______

APRENDE CON LA TECNOLOGÍA

Utiliza una hoja de cálculo electrónica y realiza la siguiente actividad.

1. Abre un archivo y escribe las fórmulas siguientes en las celdas que se indican:

	A	B	C	D
1	0.4839338817	2.9036029	2	3
	En A1, ingresa: =ALEATORIO ()	En B1, ingresa: =A1*6	En C1, ingresa: =Entero(B1)	En D1, ingresa: =C1+1

a) Presiona la tecla F9, ¿qué sucede con el valor de la celda A1? ______

b) Los números obtenidos en A1 están entre 0 y 1. Cuando se multiplica A1 por seis, ¿qué números se puede obtener?

c) En C1, al pedir el entero de B1, sólo se muestra el número a la izquierda del punto decimal, ¿qué números pueden salir cada que se presiona F9?

d) En D1, sólo se suma uno a los números que van saliendo en C1, ¿cuáles serán los números que podremos obtener ahora?

Lo que has construido en la hoja de cálculo es una forma de **emular** un dado de seis caras y cada vez que presionas F9 es como si lanzaras dicho dado.

e) Si se oprime F9 90 veces, ¿cuántas veces esperas que salga cada número? ¿Por qué?

Tic

Revisa las actividades "Simulación con el modelo de urna (1)" y "Simulación con el modelo de urna (2)" del libro *Matemáticas* con la hoja de cálculo electrónica (EMAT, México, SEP, 2000, pp. 131-133). Recuerda que para realizar esta actividad debes tener el archivo ModeUrena.xls, ver: https://vdocuments.mx/documents/ensenanza-de-matematicas-con-hoja-de-calculo.html

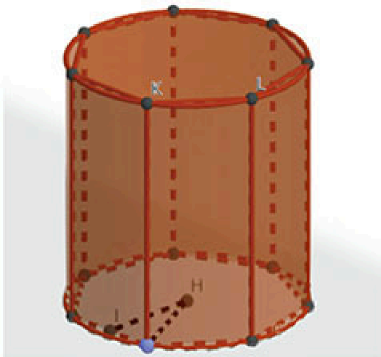
Glosario

Emular. Imitar una acción proveniente de otra persona o entidad procurando igualarlo o incluso mejorarlo u optimizarlo.

P3 Herramientas matemáticas

Área de polígonos y volumen de prismas y cilindros

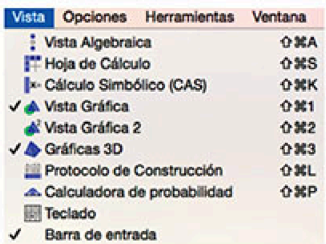
Como viste en las lecciones 20 y 21, existe una relación entre los procedimientos para calcular el área de polígonos regulares y el círculo, de la misma manera que sucede con el volumen de prismas poligonales y el cilindro. En ambos casos, se calcula el área del polígono o del círculo, de las bases, y se multiplica el valor por la altura para obtener su volumen.



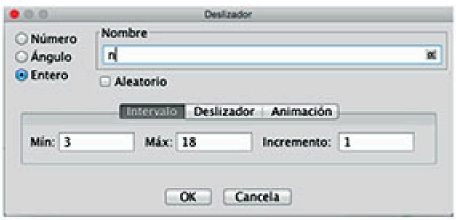
Geogebra es una herramienta que resulta muy útil para representar distintos cuerpos geométricos.

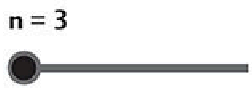
1. Con Geogebra puedes ver una relación interesante entre ambos tipos de cuerpos, realizando la siguiente construcción:

   a) En la ventana "Vista", activa "Vista Gráfica" y "Gráficas 3D", como muestra la imagen.

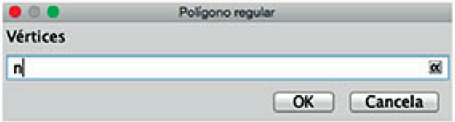


   b) En vista gráfica con la herramienta: $a=2$, ingresa un deslizador que se mueva a través de los enteros, elige los parámetros que muestra la imagen de abajo, siguiendo el procedimiento del periodo 2 de esta misma sección; esta herramienta te permitirá manipular las figuras que trazarás más adelante.

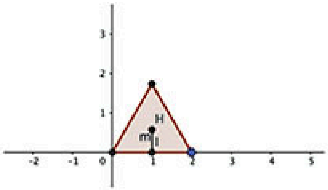




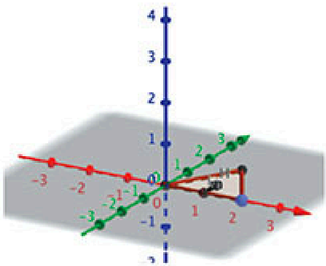
c) Con la herramienta "Polígono regular": traza un segmento de dos unidades sobre el eje x e ingresa una figura de n vértices.



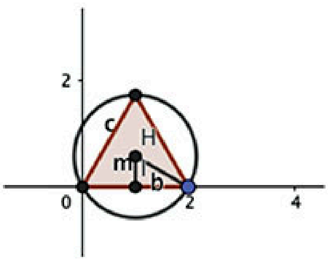
d) Con la opción "Punto medio", determina el punto medio del polígono y del lado sobre el eje x. Une dichos puntos para obtener la apotema del polígono.



e) En la pantalla de "Gráfica 3D", debe estar reflejado el polígono sobre el plano, como se muestra en la siguiente imagen.



2. Traza una circunferencia con: Circunferencia (centro, punto) , su centro debe ser el mismo que el del polígono y la circunferencia debe pasar por los vértices del polígono.



3. Mueve el deslizador y en la ventana "Vista Gráfica" observa cómo se modifican las medidas del polígono y del círculo.

a) ¿Cuál es el área del polígono de cinco lados? ¿Y la del círculo correspondiente? ____________________

b) ¿Cuánto mide la apotema del polígono de 12 lados? ¿Y su área? ____________________

____

c) ¿Cuánto mide el área del círculo que corresponde al polígono anterior? ____________________

d) ¿Qué sucede con el área del círculo y del polígono entre más lados tiene el polígono? ____________________

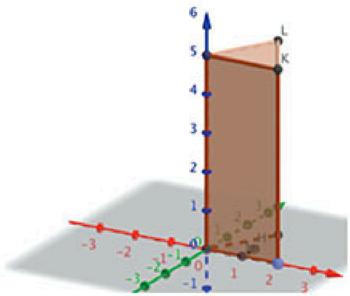
____

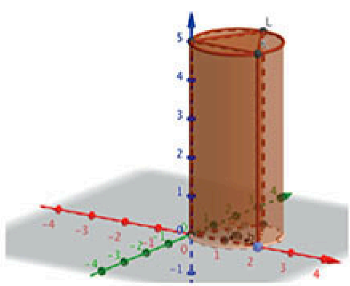
4. Completa la siguiente tabla a partir de los polígonos y círculos que se forman al mover el deslizador. Consideren dos unidades para los lados de los polígonos.

Lados	Apotema del polígono	Área del polígono	Radio del círculo	Área del círculo	Diferencia entre las áreas
3					
6					
9					
12					
15					

5. Ve a la pantalla de "Gráfica 3D" y utiliza la herramienta Prisma o cilindro desde su base para construir un prisma que tenga cinco unidades de altura cuya base sea el polígono.

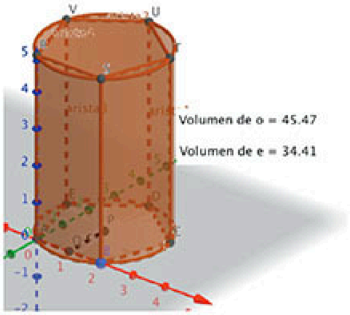
a) Selecciona la herramienta, da clic sobre el polígono y en la ventana que aparece escribe 5. Repite el mismo procedimiento para trazar el cilindro cuya base sea el círculo correspondiente. En la pantalla se mostrarán figuras como las siguientes.





b) Puedes mover el deslizador para modificar la base y, por tanto, el tipo de prisma.

6. Con la herramienta: cm^3, obtén el volumen del prisma y del cilindro.



a) Empieza a mover el deslizador desde 3 hasta 18 y observa lo que sucede con las medidas del volumen del prisma y del cilindro.

7. Completa la siguiente tabla.

Lados	Área del polígono	Área del círculo	Volumen del prisma	Volumen del cilindro	Diferencia entre el volumen
4					
7					
10					
14					
18					

a) ¿Cómo varían las cifras conforme aumentan el número de lados de la base del prisma?

b) Si multiplicas la diferencia entre las áreas de las bases por la altura de los cuerpos geométricos, ¿qué resultado obtienes?

c) ¿En algún momento serán iguales?

Evalúate. Mide tu desempeño

Estima tu nivel de desempeño. Antes de contestar la evaluación, regresa a la lección correspondiente de cada indicador y realiza una actividad de repaso del tema que requieras.

Indicador	Niveles de desempeño		
	Me resulta complicado	Necesito apoyo	Logro resolverlo solo
Resuelvo divisiones de fracciones y números decimales, positivos y negativos.			
Represento cantidades muy grandes o muy pequeñas por medio de notación científica.			
Resuelvo problemas de proporcionalidad inversa de manera tabular, gráfica y algebraica.			
Resuelvo problemas de cálculo del área del círculo, aplicando la fórmula correspondiente.			
Calculo el volumen de prismas poligonales y de cilindros rectos.			
Determino la probabilidad teórica o clásica de experimentos aleatorios y la contrasto con la probabilidad frecuencial.			

Evaluación. Tercer periodo

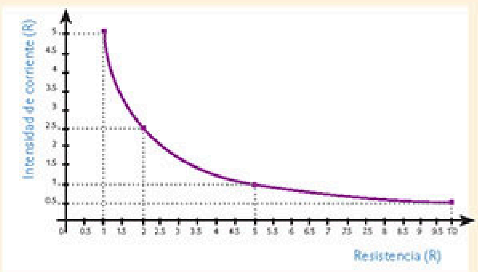
Lee los problemas y resuelve lo que se pide.

1. Una pila conectada por un cable de cobre a un foco forma un circuito eléctrico simple, es decir, una trayectoria cerrada que recorre una corriente eléctrica. El comportamiento de la corriente eléctrica fue estudiado por el físico George Simon Ohm (1787-1854), quien postuló la ley que lleva su nombre, donde indica que el voltaje es proporcional a la intensidad de corriente: $V = IR$.
   En un circuito eléctrico se fijó el voltaje (V) en 5 voltios, y se fue aumentando la resistencia (R) para observar cómo se comportaba la intensidad de corriente (I). Se obtuvo la siguiente gráfica.

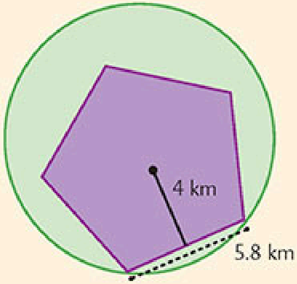
   De las siguientes expresiones, ¿cuál es la que representa la relación entre la intensidad de corriente y la resistencia?

   a) $I = \frac{5}{R}$ **b)** $R = \frac{5}{I}$

   c) $I = 5R$ **d)** $R = \frac{I}{5}$



2. En una ciudad se va a construir un complejo industrial. El área donde lo construirán tiene una forma circular de 6 km de radio. El complejo industrial se construirá en una región con forma pentagonal, con las medidas que muestra la imagen. Los vecinos de la zona protestan contra la construcción del complejo, porque argumentan que ocupará más de 50 % del área verde, situación que está contra la norma. ¿Los vecinos tienen razón?



a) No, el complejo industrial ocupará exactamente 50 % del área verde.
b) No, el complejo industrial ocupará 48.69 % del área verde
c) Sí, el complejo industrial ocupará 51.3 % el área verde.
d) Sí, el complejo industrial ocupará 60 % del área verde.

3. Una botella de agua con forma cilíndrica tiene las dimensiones que se aprecian en la imagen. Carlos llenó la botella y bebió medio litro de ella. ¿Qué cantidad de agua quedó en la botella?

a) Un litro y medio
b) Un litro
c) Medio litro
d) Un cuarto de litro

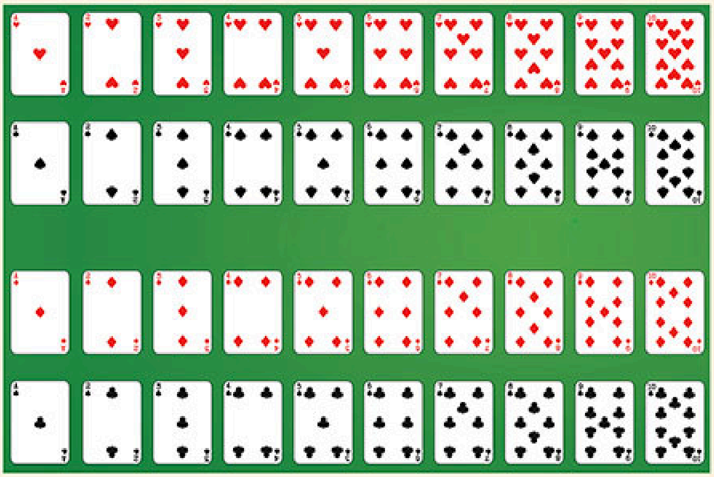
4. La obsidiana es un tipo de roca volcánica que se usa en joyería para elaborar dijes. En una joyería venden un dije de obsidiana con forma de prisma octagonal. Su precio se calcula en $100 el centímetro cúbico. Si las medidas de la pieza son 1 cm de lado, 1.21 cm de apotema y 2.5 cm de altura, ¿qué precio tiene la pieza?

a) $121.00
b) $1 210.00
c) $302.50
d) $2 420.00

5. En un grupo de primaria se realizó un sorteo para determinar quiénes participarán en la organización del convivio de fin de curso. Para ello, se colocaron en una urna 15 esferas amarillas y 9 esferas azules. Quienes obtengan una esfera amarilla no participarán en la organización del convivio. Diana es la primera en extraer de la urna una esfera al azar. ¿Qué probabilidad hay de que Diana no obtenga una esfera amarilla?

a) 75% b) 9 c) 0.375 d) $\frac{5}{8}$

6. Como espectáculo nocturno, un restaurante presenta un número de magia. El acto principal del mago consiste en utilizar un mazo de 40 cartas, como se muestra en la imagen, y elegir a varias personas del público. El mago revuelve el mazo y le pide a una persona de las elegidas que escoja una carta al azar y que la muestren al público, después, le dice: "Tu carta es un par negro o un impar". ¿Qué probabilidad hay de que lo que dice el mago sea cierto?



a) $\frac{5}{10}$ porque para cada grupo de la misma figura en el mazo, hay cinco cartas pares y cinco impares.

b) $\frac{3}{4}$ porque son 30 casos favorables de 40.

c) $\frac{1}{40}$ porque hay 40 cartas y la persona elige sólo una carta.

d) $\frac{1}{3}$ porque se deben cumplir tres condiciones: par y negro, o impar.

7. Un bit (b) es una señal electrónica que puede estar encendida (1) o apagada (0). Esta es la unidad más pequeña de información que utiliza un ordenador. Son necesarios 8 bits para crear un *byte*. *Los gigabyte* (GB) se utilizan para referirnos a la capacidad de un disco duro o a videos de alta definición. En informática cada unidad representa 1 024 unidades de la unidad anterior. Así tenemos que 1 bit equivale, aproximadamente, a 0.0000000001164 GB. ¿Cuál es la equivalencia en notación científica?

a) 1.164×10^{-10} b) 1.164×10^{-9} c) 11.64×10^{-9} d) 1.164×10^{-12}

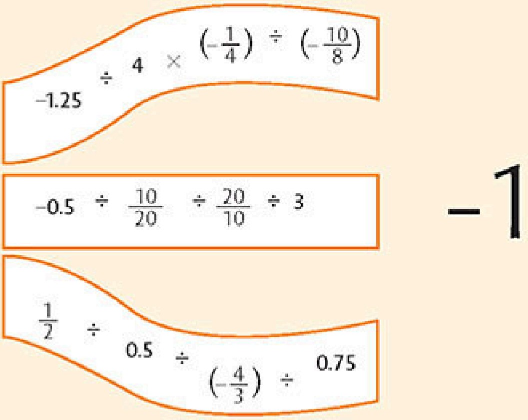
8. Un grupo de 12 estudiantes que participó en un curso de inglés juntaron dinero para comprarle un regalo a su profesor. Cada uno aportó $57 para comprar el regalo. Después de que compraron el regalo, tres alumnos más se unieron al grupo, por lo que recalcularon lo que cada uno tenía que aportar, y las aportaciones de los nuevos participantes las repartieron en partes iguales entre los 12 estudiantes originales. ¿Cuánto dinero le regresaron a cada uno?

a) $15 b) $8.50 c) $11.40 d) $12.80

9. Carlos tiene un saldo de −$1 961.60 que tiene que pagar en un plazo de ocho semanas. ¿Cuánto dinero restará a su deuda cada semana?

a) −$195.20 b) −$265.80 c) −$245.20 d) −$302.50

10. Observa la siguiente imagen. Sólo un camino de operaciones te lleva al resultado −1, ¿qué camino es?



Mide tu avance

En grupo, califiquen su examen. Después, anota tus resultados en la siguiente tabla.

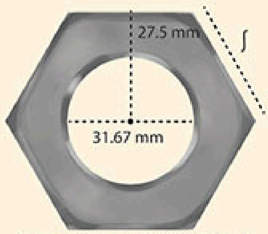
En caso de que tu respuesta no haya sido correcta, regresa a la lección y las páginas que se sugieren para repasar el contenido.

Reactivo	Contenido	Respuesta	Sugerencia
1	Identifico la relación entre la gráfica y la expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa.		Lección 19, página 194
2	Calculo el perímetro y el área de polígonos regulares y del círculo.		Lección 20, página 208
3	Calculo el volumen de cilindros y relaciono unidades de volumen y de capacidad.		Lección 21, página 216
4	Resuelvo problemas sobre el cálculo del volumen de prismas rectos.		Lección 21, página 216
5	Calculo la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.		Lección 22, página 226
6	Calculo la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.		Lección 22, página 226
7	Represento cantidades muy pequeñas en notación científica.		Lección 18, página 186
8	Resuelvo problemas que involucran números y decimales.		Lección 17, página 178
9	Resuelvo problemas que involucran divisiones de números fraccionarios y decimales, positivos y negativos.		Lección 17, página 178
10	Resuelvo operaciones que involucran fracciones y decimales, positivos y negativos.		Lección 17, página 178

Evaluación final

Lee los problemas y elige la respuesta correcta.

1. En un catálogo industrial, Raúl encontró la siguiente tuerca:

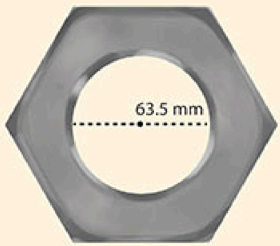


Área cara frontal: 1 832.025 mm²

Para saber si es la tuerca que necesita, debe calcular la medida de su lado. A partir de los datos de la imagen, indica cuál es la medida del lado de la tuerca. (En cada cálculo redondea a dos cifras decimales y utiliza 3.14 como valor aproximado de π)

a) 22.2 mm b) 60.38 mm c) 31.74 mm d) 190.5 mm

2. Para pedir la tuerca que necesita en la ferretería, Raúl debe convertir la medida que se muestra en la imagen a pulgadas. ¿De cuántas pulgadas es la tuerca?



a) 25 in b) $2\frac{1}{2}$ in c) 16.129 in d) 161.29 in

3. En una fábrica de productos hechos de cartón, elaboran cajas cilíndricas de 8 cm de diámetro para regalar botellas de vino. ¿Cuál de las alturas en las opciones de abajo es la adecuada para guardar una botella de 1.5 litros de vino?

a) 30.5 cm
b) 25 cm
c) 8 cm
d) 10 cm

4. En cinco horas, a una velocidad media constante, los metros de Londres y la CDMX recorrerían entre los dos una distancia de 345 km. La velocidad media del metro de la CDMX sólo es 3 km/h mayor que la velocidad media del metro de Londres. ¿Cuál es la velocidad media del metro de la capital de Inglaterra?

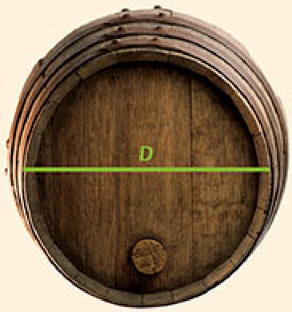
a) 34.5 km/h **b)** 169.5 km/h **c)** 66 km/h **d)** 33 km/h

5. En México, la Secretaría de Defensa Nacional aplica un mecanismo de sorteo para elegir entre los jóvenes con 18 años cumplidos a los que realizarán el servicio militar. Supongamos que el mecanismo es el siguiente: en una urna con igual número de bolas blancas y negras, cada joven pasa a extraer una bola al azar y NO la devuelve a la urna. Si saca una bola blanca, significa que realizará el servicio militar, y si saca una bola negra significa, que el joven no se verá obligado a hacerlo.
El sorteo ha comenzado y Jaime es el séptimo joven que va a pasar a extraer una bola de la urna. Hasta ahora, en las seis extracciones anteriores, se han obtenido cuatro bolas blancas y dos negras. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La probabilidad de que Jaime saque una bola negra es $\frac{1}{2}$, porque sólo hay dos posibles resultados: blanco o negro.
b) No se puede calcular la probabilidad de que Jaime obtenga una bola blanca o negra en la siguiente extracción, porque no sabemos cuántas bolas hay en la urna.
c) La probabilidad de que Jaime obtenga una bola negra en la siguiente extracción es mayor que la de que obtenga una bola blanca.
d) La probabilidad de que Jaime obtenga una bola blanca en la siguiente extracción es mayor que la de obtener una bola negra, porque hasta ese momento es el resultado que más se ha repetido.

6. Victoria es carpintera y necesita elaborar una tapa circular para un barril, como el que se muestra en la imagen. La tapa debe cubrir un área de 2.0096 m² y para diseñarlo debe calcular el diámetro de la tapa. ¿Cuánto debe medir dicho diámetro?
(Considera 3.14 como aproximación de π).

a) 0.8 m **b)** 0.64 m **c)** 0.16 m **d)** 1.6 m

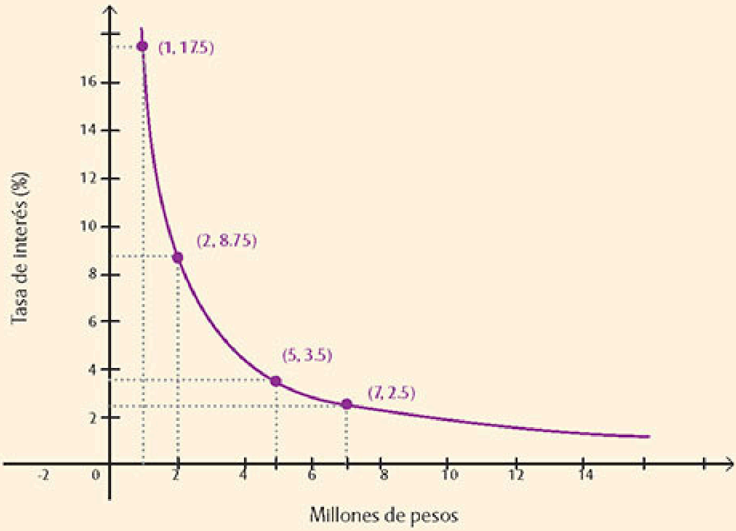


EF

7. Erick y Nayeli trabajan juntos en una casa editorial y cobran por honorarios. Recibieron un pago de $24 540 por un proyecto de un libro de 120 páginas, pero deben pagar 16 % de IVA al Sistema de Administración Tributaria. El pago de los impuestos lo repartirán de manera proporcional a lo que cada uno trabajó. Si Erick trabajó 90 páginas y Nayeli 30 paginas, ¿cuánto tiene que pagar cada uno de impuestos?

   a) Erick paga $3 927.68 y Nayeli $1 963.84.
   b) Erick paga $2 944.80 y Nayeli $981.60.
   c) Erick paga $2 875.90 y Nayeli $1 025.70.
   d) Erick paga $1 986.80 y Nayeli $896.70.

8. En una institución bancaria, a los clientes distinguidos con tarjeta de crédito se les otorga un contrato en el que mientras, más alto sea el crédito que soliciten, la tasa de cobro de interés disminuye, como se observa en la siguiente gráfica:

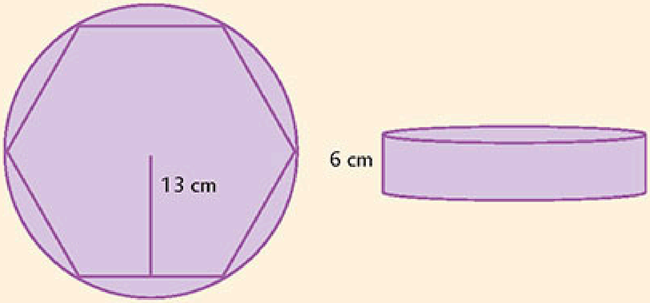


Si un cliente distinguido solicita un crédito de 10 millones de pesos, ¿cuál es la tasa de interés que se le aplicará al crédito que solicitó?

   a) 1.75 %
   b) 2 %
   c) 1.5 %
   d) 2.1 %

9. En un trozo de madera circular de 30 cm de diámetro, Héctor va a trazar un hexágono con sus vértices sobre la circunferencia para diseñar un reloj, como muestran las imágenes. ¿Cuánta madera sobrará al hacer los cortes?

a) 681.36 cm^3
b) 121.86 cm^3
c) 731.16 cm^3
d) 30 cm^3



10. Una empresa que fabrica teléfonos móviles verifica la calidad de las baterías de su más reciente modelo, observando el tiempo que tardan en descargarse. Su norma de calidad indica que la desviación media de los tiempos de descarga de cada teléfono no debe exceder los 30 minutos.

Batería	Tiempo de descarga
A	24.5
B	23.3
C	24.4
D	24.3
E	23.75

¿Qué batería no cumple con la norma?
a) Batería A
b) Batería B
c) Batería C
d) Batería E

Glosario

A

Abscisa. Primer elemento de las coordenadas (x, y) que define un punto en un plano, corresponde al eje x.

Ángulo. Abertura formada por dos semirrectas con un mismo origen denominado vértice.

Ángulos adyacentes. Son los que tienen un lado común y sus otros lados pertenecen a la misma recta.

Ángulo agudo. Ángulo que mide más de 0° y menos de 90°.

Ángulo central. Ángulo que va del centro de una circunferencia a dos puntos sobre ella. En polígonos regulares, es el ángulo que va del centro de la figura a dos vértices consecutivos.

Ángulos complementarios. Ángulos que suman 90°.

Ángulo exterior. Ángulo que se forma con un lado de un polígono y la prolongación de su lado adyacente.

Ángulo interior. Ángulo que se forma entre dos lados consecutivos de un polígono.

Ángulo obtuso. Ángulo que mide más de 90° y menos de 180°.

Ángulo recto. Ángulo que mide 90°.

Ángulos suplementarios. Ángulos que suman 180°.

Arco. Parte de una circunferencia.

Área. Espacio o superficie comprendida entre ciertos límites, que se mide en unidades cuadradas.

C

Catetos. Lados que forman el ángulo recto de un triángulo rectángulo.

Cilindro. Cuerpo geométrico formado por dos base circulares y una cara lateral curveada.

Círculo. Región interior de una circunferencia.

Circunferencia. Línea curva cerrada cuyos puntos están a la misma distancia de un punto fijo llamado centro.

Cociente de potencias de la misma base. Es igual a la misma base elevada a la diferencia de los exponentes: $2^5 \div 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$.

Constante de proporcionalidad. Es el cociente entre las variables que guardan una relación directamente proporcional: *x/y*.

Cuadrado. Paralelogramo con cuatro lados iguales y cuatro ángulos de 90°.

D

Decágono. Polígono de diez lados.

Decalitro. Medida de capacidad equivalente a diez litros.

Deci. Prefijo que significa décima parte.

Decilitro. Medida de capacidad equivalente a la décima parte de un litro.

Denominador. Parte de una fracción que indica en cuántas partes está dividida la unidad.

Densidad. Propiedad de las fracciones y de los decimales que indica que dados dos números cualesquiera, siempre es posible encontrar un número entre ellos.

Desigualdad. Relación de orden que indica que dos expresiones no son iguales.

Desviación. En estadística, diferencia de cada valor con la media.

Desviación media. Es igual al promedio de la distancia de los datos de un conjunto a su media.

Diámetro. Segmento que toca dos puntos de una circunferencia, que pasa por su centro.

Diagonal. Segmento que une dos vértices no consecutivos de una figura geométrica.

Diagrama. Representación gráfica que explica un fenómeno estadístico, matemático, etcétera.

Dispersión. Medida cuantitativa que indica la dispersión de la distribución de datos.

Dividendo. Número que se divide entre otro número.

División. Operación matemática que consiste en dividir un número en las partes que indica otro.

Divisor. Número que divide al dividendo.

E

Ecuación. Es una igualdad válida sólo para ciertos valores de las variables.

Ecuación lineal o de primer grado con una incógnita. Es una igualdad con una incógnita cuyo exponente es 1 y puede ser de la forma: $ax = b$, $ax + b = c$, $ax + b = cx + d$.

Ecuaciones equivalentes. Son dos o más ecuaciones que tienen la misma solución.

Equidistar. Estar (dos o más puntos o cosas) a la misma distancia de otro o a la misma distancia entre sí.

Experimento aleatorio. Es aquel en el que no se puede predecir o anticipar el resultado exacto de un evento en particular.

Exponente. Número que indica la potencia a la que hay que elevar una cantidad. Cuando el exponente es 1 no se coloca ($x^1 = x$).

Expresión algebraica. Combinación de letras y números unidos por los signos de operación.

F

Factor. Cada uno de los números o literales en una multiplicación.

Factor constante de proporcionalidad. Valor por el que se multiplica o divide una variable para obtener su correspondiente. Comúnmente, se simbolizan con la letra *k*.

Figura a escala. Es aquella cuyas dimensiones guardan una proporcionalidad directa con las dimensiones de la figura original.

Finito. Que tiene fin, término o límite.

Fracción. Número de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b son números enteros, y b es distinto de cero.

Fracción decimal. Fracción cuyo denominador es una potencia de 10.

Fracción impropia. Fracción cuyo numerador es mayor que el denominador.

Fracción irreductible. Fracción que no se puede simplificar más.

Fracción propia. Aquella cuyo numerador es menor que el denominador.

Fracciones equivalentes. Son aquellas fracciones que tienen el mismo valor numérico.

Función lineal. Se define como la función de dos variables como una expresión de la forma $y = ax + b$. Su representación gráfica es una recta.

G

Galón. Unidad de capacidad del sistema inglés que equivale a 3.785 L.

Grado. Unidad de medida que se utiliza para medir la abertura de un ángulo (º).

Gráfica circular. Representación estadística que se utiliza para representar porcentajes y proporciones.

Glosario

H

Hecta. Prefijo que significa cien.

Hectárea. Medida de superficie que equivale a 10 000 m^2.

Hectolitro. Medida de capacidad equivalente a 100 litros.

Heptágono. Polígono de siete lados.

Hexágono. Polígono de seis lados.

Hipérbola. Nombre de la curva que forma una gráfica que representa una relación de proporcionalidad inversa.

Hipótesis. Enunciado que se toma como base de un razonamiento matemático.

Histograma. Gráfica de barras que representa valores continuos agrupados por intervalos.

I

Incógnita. Nombre que reciben cada una de las literales involucradas en una igualdad matemática.

Intervalo de clase. Nombre que reciben los intervalos en que se divide un conjunto de datos, los cuales deben tener el mismo rango.

Intervalo semiabierto. Puede ser semiabierto a la izquierda o la derecha. Un intervalo semiabierto: $[a, b)$, es igual al conjunto de todos los números iguales o mayores que a y menores que b.

Intervalo cerrado. Comprende todos los números entre los valores extremos de un intervalo.

J

Jerarquía de operaciones. Orden en que deben resolverse las operaciones múltiples.

K

Kilolitro. Medida de capacidad equivalente a mil litros.

L

Litro. Unidad principal de medidas de capacidad. Equivalente a un dm^3.

Lenguaje algebraico. Expresa información matemática por medio de letras, símbolos y números.

M

Marca de clase. Punto medio o promedio de los valores extremos de un intervalo de clase.

Media aritmética. Cociente entre la suma de los términos de una sucesión y el número de ellos.

Mediana. Valor que se encuentra al centro de un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Cuando el número de datos es par, es la media de los dos valores centrales.

Medidas de dispersión. Son parámetros que indican cómo se alejan los datos respecto de la media.

Milla. Unidad de longitud del sistema inglés que se usa para medir distancias grandes. Una milla equivale a 1.609 km.

Moda. Valor que más se repite en un conjunto de datos cualitativos o cuantitativos.

N

Notación científica. Forma abreviada de representar un número muy grande o muy pequeño como una multiplicación de un número entre 1 y 10 por una potencia de 10.

Numerador de una fracción. Partes que se toman de la unidad.
Números decimales. Constan de una parte entera y una parte decimal, separadas por el punto decimal.
Números decimales finitos. Se expresan mediante un número finito de unidades decimales.
Números decimales periódicos. Números cuya extensión decimal es infinita, en la que una o varias cifras se repiten indefinidamente.
Números enteros. Conjunto de los números naturales, sus simétricos y el cero:
$Z = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
Número natural. Son los números que se utilizan para medir o contar:
$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$.
Números enteros negativos. Conjunto de los números enteros que tienen signo "−" :
$\{-1, -2, -3, -4, --5, \ldots\}$.
Números enteros positivos. Conjunto de los números enteros que tienen signo "+":
$\{+1, +2, +3, +4, +5, \ldots\}$.
Números simétricos u opuestos. Números que en la recta numérica están a la misma distancia del cero, pero de lados opuestos.
Número pi (π). Número de cifras decimales infinitas que es igual al cociente:
$\frac{\textit{circunferencia}}{\textit{diámetro}} = 3.1416 \ldots$

O

Onza. Unidad de masa del sistema inglés que equivale a 38.35 g.
Onza líquida. Unidad de capacidad del sistema inglés que equivale a 29.58 ml.
Ordenada. Segundo elemento de las coordenadas (x, y) que definen un punto en un plano cartesiano y corresponde al eje y.
Ordenada al origen. Punto donde una recta corta al eje y, le corresponde la coordenada $(0, y)$.
Origen. Punto de intersección de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas.

P

Paralelogramo. Figura geométrica de cuatro lados que tiene dos pares de lados paralelos.
Pendiente. Medida de inclinación de una recta que representa una relación lineal
Pentágono. Polígono de cinco lados.
Perímetro. Contorno de una superficie o figura plana. Se mide en unidades lineales.
Pie. Unidad de longitud del sistema inglés que equivale a 30.48 cm.
Polígono de frecuencias. Gráfica de líneas que se forma a partir del punto más alto de la marca de clase de las barras de un histograma. Se considera una gráfica cerrada porque empieza y termina en cero.
Polígono regular. Figura geométrica cerrada que tiene todos sus lados iguales.
Potencia. Representación abreviada de una multiplicación de un mismo factor repetidas veces, por ejemplo: 3^4, donde 3 es la base y 4 el exponente.
Potencia de una potencia. Es igual a la misma base elevada al producto de los exponentes: $(3^4)^4 = 3^{(4)(4)} = 3^{16}$.

Glosario

Pulgada. Unidad de medida de longitud del sistema inglés que equivale a 2.54 cm.

Probabilidad frecuencial. Cociente del número de veces que ocurre un evento al realizar un experimento aleatorio, entre el total de repeticiones del experimento.

Probabilidad teórica. También llamada probabilidad clásica. Es igual a la razón del número de maneras en que un evento puede ocurrir entre el número de resultados posibles.

Producto de potencias de la misma base. Es igual a la misma base elevada a la suma de los exponentes: $2^5 \times 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$.

Proporcionalidad directa. Relación entre dos magnitudes, en la que al aumentar o disminuir una, la otra lo hace en la misma proporción. Algebraicamente es de la forma: $y = kx$. Su gráfica es una recta que pasa por el origen.

Proporcionalidad inversa. Relación entre dos magnitudes, en la que al aumentar una, la otra disminuye en la misma proporción; o al disminuir una, la otra aumenta de la misma manera. Algebraicamente es de la forma: $y = k/x$.

R

Radio. Segmento que une el centro de una circunferencia con cualquiera de su puntos.

Rango. En estadística es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos ordenados.

Razón. Relación entre dos magnitudes que son comparables entre sí. Por ejemplo, 2 de cada 5 personas usan lentes: razón 2:5. Razón de cambio.

Recta paralelas. Pares de rectas que siempre están a la misma distancia.

Rectas perpendiculares. Pares de rectas que se cortan en un punto formando ángulos rectos.

Redondear. Reducir un número decimal manteniendo un valor similar. Si la última cifra es menor que 5, se trunca el número y si es igual o mayor que 5, se aumenta a la siguiente unidad.

Regla de tres. Permite establecer una igualdad entre dos razones, para determinar la incógnita se realiza lo siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c} \qquad x = \frac{ac}{b}$$

Reparto proporcional. Es aquel en el que una cantidad que está dividida en partes, se reparte en la misma proporción como partes de una segunda cantidad.

S

Sector circular. Región de un círculo limitada por dos radios de la circunferencia.

Segmento. Porción de recta limitada por dos puntos.

Sistema de ecuaciones lineales 2 × 2. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que puede tener una solución, infinitas soluciones o ninguna solución. El punto de intersección de la gráfica de ambas ecuaciones representa la solución. Cuando las rectas son paralelas, el sistema no tiene soluciones; y cuando comparten todos sus puntos, el sistema tiene infinitas soluciones.

Sucesión. Conjunto ordenado de números o figuras que siguen una regla o patrón.

Sucesión aritmética. Sucesiones cuya diferencia entre términos consecutivos es constante y son de la forma: $an + b$.

T

Término de una sucesión. Cada uno de los elementos que forman una sucesión y se enumeran en orden ascendente.

Teselado. Construcción geométrica que sigue cierto patrón o regularidad que permite cubrir un plano, sin que sus elementos se encimen o queden huecos entre ellos.

Triángulo. Figura geométrica de tres lados y tres ángulos.

Truncar. Reducir un número decimal al número de cifras que se requiera (décimos, centésimos, etc.).

V

Valor absoluto. Es igual a la distancia de un número al cero, sin considerar su signo y se representa: valor absoluto de $|-a| = a$, y se representa: $|a| = a$.

Y

Yarda. Unida de longitud del sistema inglés que equivale a 91.44 cm.

Bibliografía recomendada

Balbuena, Luis, *Cuentos del cero*, Madrid, Nivola, 2005.

Berlanga, Ricardo, Carlos Bosch Giral y Juan José Rivaud Morayta, *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*, México, FCE, 2003.

Blatner, David, *El encanto de pi*, México, SEP-Aguilar, 2003 (Libros del Rincón: Serie Espejo de Urania).

Cesaroli, Anna, *Los diez magníficos. Un niño en el mundo de las matemáticas*, México, SEP-Ediciones Maeva, 2005 (Libros del Rincón: Serie Espejo de Urania).

De Guzmán, Miguel, *Cuentos con cuentas*, Barcelona, Nivola, 2007.

De la Peña, José Antonio, *Geometría y el mundo*, México, SEP-Santillana, 2002 (Libros del Rincón: Serie Espejo de Urania).

-------- *Números para contar, medir, crear y soñar*, México, SEP-Santillana, 2006 (Libros del Rincón: Serie Astrolabio).

Enzensberger, Hans Magnus, *El diablo de los números*, México, Siruela, 1998.

Gonick, Larry, Wollcott Smith, *La estadística en cómic*, Barcelona, Zendrera Zariquiey, 2002.

Marván, Luz María y Agustín Prieto Huesca, *Explorando en Matemáticas 1*, México, Nuevo México, 2000.

Millás, Juan José y Antonio Fraguas Forges, *Números pares, impares e idiotas*, España, Alba Editorial, 2006.

Moreno, Ricardo y José Manuel Vegas Montaner, *Una historia de las Matemáticas para jóvenes. Desde la Antigüedad hasta el Renacimiento*, España, Nivola, 2002.

Muñoz, José, *Ernesto, el aprendiz de matemago*, Madrid, Nivola, 2008.

Norman, L. C., *El país de las mates para novatos*, Madrid, Nivola, 2002.

Perelman, Yakov Isidorovich, *Matemáticas recreativas*, México, SEP-Santillana, 2003 (Libros del Rincón: Serie Espejo de Urania).

Secretaría de Educación Pública, *Fichero de actividades didácticas, Matemáticas. Educación secundaria*, México, SEP-EMAT, 2000.

-------- *Geometría dinámica*, México, EMAT. Educación secundaria.

-------- Matemáticas con la hoja electrónica de cálculo. México, EMAT. Educación secundaria.

Sierra, Jordi, *El asesinato del profesor de Matemáticas*, Madrid, Grupo Anaya, 2001 (El duende verde, 123).

Villagrá, María y Ana Villagrá, *Atlas básico de matemáticas*, México, SEP-Parramón, 2003 (Libros del Rincón: Serie Espejo de Urania).

Páginas electrónicas

En esta página, podrás apreciar la presencia de las matemáticas en el arte, la naturaleza, la política y otros ámbitos, de una manera amena y divertida.

www.catedu.es/matematicas_mundo

A través de las actividades de este sitio podrás desarrollar una mentalidad abierta y optimista con relación al pensamiento lógico-matemático. Se abordan aspectos contextuales sobre qué es el pensamiento lógico-matemático, su historia y su implementación en la vida cotidiana.

http://red.ilce.edu.mx/index.php?option=com_content&view=article&id=17&Itemid=117

Explora los siguientes sitios de internet; en ellos encontrarás información conceptual, procedimientos, problemas y ejercicios de muchos de los contenidos trabajados a lo largo del ciclo escolar, que te permitirán reforzar los conocimientos adquiridos.

- arquimedes.matem.unam.mx/Vinculos/Secundaria/1_primero/1_Matematicas/index.html
- www.aplicaciones.info/decimales/propo02.htm
- www.thatquiz.org/es/
- https://es.khanacademy.org/

Contiene una guía clara de Geogebra, en la que se explica cómo manipular la aplicación para desarrollar materiales estáticos o animados que contribuyan a validar y reforzar tus conocimientos o labor docente.

http://geogebra.es/cvg/index.html

Nota: Todos los sitios fueron consultados el 26 de junio de 2018.

www.pearsonenespañol.com

ISBN 978-607-32-4827-3